Numéro d'ordre Année 1973

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jacques BARANGER

QUELQUES RESULTATS EN OPTIMISATION NON CONVEXE

1ère partie : FORMULES OPTIMALES DE SOMMATION D'UNE SERIE

2ème partie : THEOREMES D'EXISTENCE "EN DENSITE" ET APPLICATION AU CONTROLE

Soutenue le 23 mars 1973 devant la commission d'examen

MM. KUNTZMANN Président

GASTINEL
LAURENT
TEMAM
} Examinateurs

Numéro d'ordre Année 1973

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jacques **BARANGER**

QUELQUES RESULTATS EN OPTIMISATION NON CONVEXE

1ère partie : FORMULES OPTIMALES DE SOMMATION D'UNE SERIE

2ème partie : THEOREMES D'EXISTENCE "EN DENSITE" ET APPLICATION AU CONTROLE

Soutenue le 23 mars 1973 devant la commission d'examen

MM. KUNTZMANN **Président**

GASTINEL
LAURENT
TEMAM
} **Examinateurs**

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE

ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM.	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIARES Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM. CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie Organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Je remercie

Monsieur J. KUNTZMANN qui m'a accueilli au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Grenoble, et qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Monsieur N. GASTINEL à qui je dois mon intérêt en Analyse Numérique, qui a constamment suivi mon travail et dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux.

Monsieur P.J. LAURENT qui a bien voulu participer au jury de cette thèse et qui m'a intéressé à l'analyse convexe.

Monsieur R. TEMAM qui m'a donné l'idée de la deuxième partie de ce travail et dont l'aide amicale m'a permis de le mener à bien.

Je remercie enfin le service Tirage pour la réalisation matérielle de ce travail et Madame DOREL pour le soin apporté à la dactylographie.

INTRODUCTION

Ce travail traite de problèmes d'optimisation non convexe. Il est divisé en deux parties indépendantes :

La première concerne la recherche de formules optimales pour le calcul de la somme d'une série au sens

$$\inf \{ \| \sigma - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i} \| , A_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{N}$$

$$n_{i-1} \leq n_i, \ i = 0 \ldots N, \ n_{-1} = 0\}$$

où σ désigne la fonctionnelle somme qui à la série $u = (u_n)$ associe sa somme $\sigma(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, et v^p la fonctionnelle ponctuelle $v^p(u) = u_p$, la norme étant prise dans un espace convenable. Comme les n_i sont inconnus, ce problème d'optimisation n'est ni linéaire ni convexe. Nous avons obtenu quelques résultats d'existence et un algorithme de calcul des A_i et n_i optimaux.

La deuxième partie traite de perturbation par addition de la norme de problèmes d'optimisation

$$\inf (J(x) + |\!|x-c|\!|, \ x \in S) \text{ ou}$$

$$\sup (J(x) + |\!|x-c|\!|, \ x \in S)$$

où S est un fermé (resp. pour le Sup fermé borné) d'un espace E ayant une propriété de convexité convenable (par exemple être uniformément convexe) et J une application scl (resp. pour le sup s.c.s) de S dans $\mathbb{R}$. Nous démontrons qu'il y a "presque toujours" existence d'une solution au sens suivant : l'ensemble des $c \in E$ pour lesquels il existe au moins un $s \in S$ réalisant l'optimum est dense dans E. Nous appliquons ensuite ces résultats en contrôle optimal.

PLAN DE LA PREMIERE PARTIE

.....

Chapitre 1 - Sous espaces hilbertiens

§ 1 - Caractérisation des sous espaces hilbertiens d'un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$

§ 2 - Sous espaces hilbertiens à noyau reproduisant

1. Définitions, propriétés
2. Matrices factorisables
3. Problèmes particuliers aux espaces de suites.

§ 3 - Sous espaces $h(A) \subsetneq \ell_1$

1. Construction
2. Approximation stable et convergente
3. Fonctionnelles ponctuelles.

Chapitre 2 - Les espaces $h^p(\varphi)$

§ 1 - Les espaces $h^p(\varphi)$

1. Définition, inclusion dans ℓ_1
2. Compléments dans le cas $p = 0$
3. Fonctionnelles ponctuelles

§ 2 - Propriétés particulières de l'espace $h^1(\varphi)$

1. Rapport avec les espaces $h(A)$
2. Quelques résultats sur les bases dans $h^1(\varphi)$, dual de $h^1(\varphi)$.

Chapitre 3 - Existence de formules optimales

§ 1 - Définitions et problèmes

Formules optimales de calcul, de sommation avec et san contraintes

§ 2 - Premiers essais de résolution du problème 2

1. $E = \ell_1$
2. $E = \ell_1(\varphi)$
3. $E = h^\circ(\varphi)$

§ 3 - Existence d'une approximation optimale pour toute fonctionnelle sur l'espace $h^1(-1/\Delta\theta)$

§ 4 - Construction d'une formule optimale de sommation d'une série dans h_a

§ 5 - Quelques exemples numériques.

Chapitre 4 - Remarques diverses

§ 1 - Accélérateurs de convergence de suites

§ 2 - Calcul de fonctionnelles optimales sur $C[\alpha,\beta]$

1. Utilisation des résultats du Chapitre 3
2. Un deuxième résultat négatif

§ 3 - Une formule optimale pour le calcul d'une intégrale sur un intervalle infini

PLAN DE LA DEUXIEME PARTIE

Chapitre 0 - Rappels

1 - Topologie

2 - Convexité
- 2.1. Analyse convexe
- 2.2. Convexité de la norme

3 - Dérivabilité
- 3.1. Dérivabilité de la norme
- 3.2. Différentiabilité des fonctions convexes

4 - Opérateurs monotones.

Chapitre 1 - Problèmes de maximisation sans hypothèses de convexité

1 - Le problème des points les plus éloignés (PPE)
- 1.1. Etude de l'ensemble des points pouvant être des PPE
- 1.2. Unicité de la solution
- 1.3. Existence
  - 1°) Contre-exemples
  - 2°) Résultats connus

2 - Le problème $\sup_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|)$
- 2.1. Utilisation des techniques d'Edelstein
- 2.2. Utilisation des techniques d'Asplund.

Chapitre 2 - Problèmes de minimisation sans hypothèses de convexité

1 - Projection sur un ensemble
- 1.1. Introduction
- 1.2. Résultats d'existence "presque toujours" vrais
- 1.3. Contre-exemples

2 - Le problème $\inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|)$

3 - Un théorème de convergence des solutions du problème perturbé

Chapitre 3 - Applications au contrôle optimal des systèmes gouvernés par des EDP (cas où l'équation d'état est elliptique)

1 - Equation d'état linéaire
1.1. Contrôle linéaire
1.1.1. Cadre général
1.1.2. Un exemple variationnel général
1.1.3. Un exemple non variationnel avec contrôle frontiè
1.2. Contrôle dans les coefficients
1.2.1. Le "problème modèle"
1.2.2. Un deuxième exemple
1.2.3. Une variante : observation frontière

2 - Equation d'état non linéaire
2.1. Un exemple avec contrôle et observation distribués
2.2. Un exemple avec contrôle dans les coefficients.

Chapitre 4 - Applications au contrôle optimal des systèmes gouvernés par des EDP (cas où l'équation d'état est une inéquation ou une équation d'évolution)

1 - L'Equation d'état est une inéquation

2 - Un exemple de contrôle frontière pour l'équation de Navier Stockes

3 - Un exemple hyperbolique ($y'' - \Delta y + vy' = f$).

P R E M I E R E P A R T I E

oOo

FORMULES OPTIMALES DE SOMMATION D'UNE SERIE

INTRODUCTION

Le problème de l'accélération de la convergence d'une suite donnée était un problème fondamental à l'époque où les mathématiciens (qui étaient à la fois purs et appliqués) effectuaient tous leurs calculs à la main. L'utilisation des ordinateurs n'a pas, tant s'en faut, résolu le problème des accélérateurs de convergence (les calculs se font vite, mais ils coûtent cher et certains restent techniquement impossibles), et il reste probablement encore beaucoup à faire dans ce domaine, à la fois sur le plan pratique et sur le plan théorique.

J'ai essayé dans ce travail de me placer d'un point de vue global, utilisant quelques notions d'analyse fonctionnelle, dont celle due à Aronszajn [1] et développée ensuite par L. Schwartz [12] [13] de sous espaces hilbertiens à noyau reproduisant d'un espace vectoriel topologique donné. L'idée était essentiellement d'entreprendre dans le cadre des séries ou des suites une étude analogue à celle faite pour les formules optimales d'intégration. (Pour la définition d'une formule optimale, on se reportera au Chapitre III § 1 ; pour les formules optimales d'intégration, voir DUC-JACQUET [6]).

Le Chapitre 1 contient un bref résumé des résultats connus sur les sous espaces hilbertiens. Ne disposant pas pour les séries, de sous espaces aussi "naturels" que les espaces de Sobolev à poids ou les espaces de fonctions analytiques utilisés pour les formules optimales d'intégration, je donne au Chapitre 1 § 3 une première approche pour "construire" des sous espaces hilbertiens de ℓ_1.

Le Chapitre 2 contient une deuxième approche de ce problème de construction et une étude assez détaillée du sous espace qui sera utilisé au Chapitre 3 : l'espace $h^1(\varphi)$.

Au Chapitre 3, j'expose le problème général de la détermination d'une formule optimale pour le calcul d'une fonctionnelle sur un espace de suites. J'y résous ce problème pour les sous espaces $h^1(\varphi)$. Il y a aussi quelques exemples numériques qui semblent indiquer que les méthodes développées ici seraient assez peu performantes.

Dans le Chapitre 4 sont résumées quelques remarques. Aux § 1 et 2, ces remarques sont négatives ; elles montrent un des aspects de la difficulté d'une étude théorique des accélérateurs de convergence même dans un cadre linéaire. Au § 3, on remarque que la méthode utilisée pour l'espace h_a (cf. Chapitre 3 § 4) peut s'employer dans des espaces de fonctions pour obtenir une formule optimale d'intégration sur un intervalle infini.

CHAPITRE 1

oOo

SOUS ESPACES HILBERTIENS

Le § 1 donne un bref résumé des généralités sur les sous espaces hilbertiens d'un espace localement convexe réel. Au § 2, je rappelle la définition d'un sous espace hilbertien à noyau reproduisant et celle d'une matrice factorisable. Je précise également quelles sont les difficultés propres aux espaces de suites. Dans le but de supprimer une partie de ces difficultés, je donne au § 3 une construction d'un type particulier de sous espaces hilbertiens de ℓ_1, les espaces h(A). Ce paragraphe s'achève par la construction d'une approximation stable et convergente des espaces h(A) par des espaces de dimension finie et la détermination des fonctionnelles ponctuelles sur h(A) qui joueront un rôle fondamental au Chapitre 3.

oOo

PLAN DU CHAPITRE 1

§ 1 - Caractérisation des sous espaces hilbertiens d'un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$. p. 1

§ 2 - Sous espaces hilbertiens à noyau reproduisant :

1. définitions, propriétés p. 2
2. matrices factorisables p. 3
3. problèmes particuliers aux espaces de suites. p. 4

§ 3 - Sous espaces h(A) $\subsetneq \ell_1$

1. construction p. 4
2. approximation stable et convergente p. 8
3. fonctionnelles ponctuelles. p. 11

§ 1 - CARACTERISATION DES SOUS ESPACES HILBERTIENS D'UN e.l.c SEPARE SUR $\mathbb{R}$

Soit E un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$. Un sous espace hilbertien de E est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ inclus dans E et tel que l'injection canonique j de $\mathcal{H}$ dans E soit continue. Cette situation sera notée $\mathcal{H} \subsetneq E$.

Diverses caractérisations ont été données par L. SCHWARTZ [12] [13], S. MAURY [9] [10], C.F. DUCATEAU [5]. Nous résumons ici succintement des résultats dont on trouvera un exposé détaillé dans [5].

Il y a isomorphisme entre les quatre ensembles suivants :

1) Hilb(E) ensemble des sous espaces hilbertiens de E muni de "l'addition" $\oplus$ ($\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ est le sous espace $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ normé par

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \inf_{h_1+h_2=h} \left(\|h_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|h_2\|^2_{\mathcal{H}_2} \right)$$

2) $\Gamma_{Hilb}(E)$ ensemble des fonctions hilbertiennes dans E muni de l'inf convolution. (Une fonction hilbertienne est une application convexe h de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

i) dom h = $\{x \in E ; h(x) < \infty\}$ soit un sous espace vectoriel de E

ii) la restriction de h à dom h est une forme quadratique positive

iii) $\{x, h(x) \leq \alpha\}$ est faiblement compact $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

L'inf convolution de deux fonctions est définie par

$$f \nabla g(y) = \inf_{x \in E} \{f(x) + g(y-x)\}$$

3) $\mathcal{Q}(E')$ ensemble des fonctions définies sur E' quadratiques convexes continues pour la topologie de Mackey $\tau(E',E)$, muni de l'addition usuelle.

4) $\mathcal{L}^+$ ensemble des noyaux H de E (applications linéaires de E' dans E symétriques positives et $\tau(E',E) - \sigma(E,E')$ compactes où $\sigma(E,E')$ est la topologie faible sur E) muni de l'addition usuelle.

L'isomorphisme 1) 4) est dû à L. Schwartz dans le cas où E est quasi complet (alors la condition H τ-σ compacte est automatiquement vérifiée).

Remarque 1 - Signalons une construction particulière de sous espace hilbertien séparable d'un Banach donné et contenant une partie dénombrable donnée, dûe à F.E. BROWDER & BUI-AN-TON [3], et la construction de "l'espace d'énergie" associé à un opérateur défini positif sur un espace de Hilbert qui est à la base de la formulation variationnelle des problèmes aux limites (cf par exemple S.G. MIKHLIN [11] Ch. 5 § 3). Cette dernière construction est un cas particulier de celle de Schwartz dans le cas où E est un espace de Hilbert de fonctions.

———X———

Nous aurons dans la suite besoin de parler des "représentant des fonctionnelles ponctuelles sur un sous espace hilbertien". Le bon cadre est alors celui des espaces hilbertiens à noyau reproduisant.

§ 2 - SOUS ESPACE HILBERTIEN A NOYAU REPRODUISANT

1. Définition, propriétés

Soit X un ensemble. H un espace de hilbert inclus algébriquement dans $\mathbb{R}^X$. Un noyau reproduisant de H est une application $g : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que

i) $g(.,y) \in H \quad \forall\, y \in X$

ii) $(g(.,y), \phi(.))_H = \phi(y) \quad \forall\, y \in X \quad \forall\, \phi \in H$

g est symétrique positive et à toute telle fonction, on peut associer un sous espace H dont g est le noyau reproduisant (th. d'Aronszajn [1]). Le noyau reproduisant d'un H est unique et H admet un noyau reproduisant ssi les fonctionnelles ponctuelles $\hat{y}$ qui à $\phi \in H$ associent la valeur de ϕ en y

$$\hat{y}(\phi) = \phi(y) \qquad \forall \phi \in H \qquad \forall y \in X$$

sont continues $\forall y \in X$. On trouvera une démonstration de ces résultats et des compléments dans Shapiro [14] et M. Duc-Jacquet [6].

2. Matrices factorisables

Dans un espace à noyau reproduisant, on appelle matrice de Gramm la matrice

$$G(u_1, \ldots, u_N) = \begin{pmatrix} g(u_1,u_1) & g(u_1,u_2) & \cdots & g(u_1,u_N) \\ g(u_2,u_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ g(u_N,u_1) & \cdots & & g(u_N,u_N) \end{pmatrix}$$

Nous aurons besoin par la suite de pouvoir inverser formellement et explicitement la matrice $G(u_1,\ldots,u_N)$ pour tout N. (C'est une condition nécessaire mais non suffisante (!) pour que nous sachions résoudre le problème 2 du Ch. 3). Le résultat suivant est alors fondamental :

Théorème

Si la matrice A est factorisable, i.e si A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_N \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_N \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1b_N & a_2b_N & \cdots & a_Nb_N \end{pmatrix}$$

alors son inverse est une matrice tridiagonale symétrique dont on connaît explicitement les coefficients. Ce théorème dû à M. DUC-JACQUET [7] est démontré ainsi que sa réciproque dans J. BARANGER & M. DUC-JACQUET [2] où on trouvera également une bibliographie de la question.

3. Problèmes particuliers aux espaces de suites

Pour le problème des formules optimales de sommation d'une série que nous étudierons au Chapitre 3, nous aurons besoin de connaître explicitement des sous espaces hilbertiens de ℓ_1 (une connaissance explicite signifie $h \in H$ ssi les h_i vérifient "quelques conditions" et $\|h\| < \infty$ où la norme est connue explicitement en fonction des h_i) dont on connaîtra explicitement la matrice de Gramm supposée factorisable. Les outils théoriques du § 1 sont assez peu pratiques pour ce propos. D'autre part, la situation dans les espaces de suites est très différente de celle étudiée par M. DUC-JACQUET dans les espaces de fonctions continues. En effet, pour les fonctions des sous espaces usuels sont connus (espaces de Sobolev avec et sans poids) alors que pour les suites de tels sous espaces avaient à être exhibés et étudiés.

Nous donnons maintenant une construction (*) ayant à peu près les qualités exigées ci-dessus, de sous espace hilbertien de ℓ_1.

Cette technique peut être améliorée et généralisée de manière à englober le cas de certains espaces de fonctions continues (cf N. GASTINEL [8] F. CATZ [4]).

§ 3 - SOUS ESPACES $h(A) \subsetneq \ell_1$

1. Construction

Soit a une matrice infinie symétrique. Notons A_n sa tronquée de rang n. On suppose

---

(*) Sur une idée de N. GASTINEL.

(3.1) A_n définie positive $\forall n$

(3.2) $$S_{1_\infty}(A_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|A_n x|_1}{|x|_\infty} \leq M \qquad \forall n$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $\tilde{y}_n$ son tronqué de rang n.

On pose

$$h(A) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sup_n \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n < M_y\}$$

Théorème 1

Sous l'hypothèse (3.1), l'espace h(A) est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

(3.3) $$(y,z) = \lim_n \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{z}_n$$

Démonstration

Par définition de la norme duale dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^{n+1} \\ x \neq 0}} \frac{|x^t \tilde{y}_n|^2}{x^t A_n x} \qquad \text{et par conséquent}$$

(3.4) $$y_{n+1}^t A_{n+1}^{-1} y_{n+1} \geq \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n \qquad \forall y_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall n$$

où $\tilde{y}_n$ est le tronqué de rang n de y_{n+1}. Alors on pose

(3.5) $$\|y\|_A^2 = \sup_n \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n = \lim_n \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n$$

$\|y\|_A = 0$ ssi $\tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n = 0$ $\forall n$ ssi (d'après 3.1) $\tilde{y}_n = 0$ $\forall n$

$\forall y, z \in h(A)$ on peut définir

$$(y,z)_A = \frac{1}{4}\left(\|y+z\|_A^2 - \|y-z\|_A^2\right) = \lim_n \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{z}_n$$

et on vérifie immédiatement que cette expression est un produit scalaire sur h(A) associé à la norme (3.5).

Reste à étudier la complétion.

Soit y^p une suite de Cauchy dans h(A)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ Q$ tel que $\forall p,q > Q$

$$\sup_n \ (\widetilde{y^p - y^q})_n^{\dagger} \ A_n^{-1} \ (\widetilde{y^p - y^q})_n < \varepsilon$$

Donc pour n fixé $(\widetilde{y^p})_n$ est de Cauchy ; soit z_n sa limite.

Posons $z_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

On déduit de (3.4) que

$$(\widetilde{y^p}_{n+1} - z_{n+1})^{\dagger} \ A_{n+1}^{-1} \ (\widetilde{y^p}_{n+1} - z_{n+1}) \geq (\widetilde{y^p}_n - u_n)^{\dagger} \ A_n^{-1} (\widetilde{y^p}_n - u_n)$$

Donc y_n^p tend vers u_n et z_{n+1} prolonge z_n. Soit z l'élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par ses restrictions z_n ; alors :

$$\forall p > Q \qquad \|y^p - z\| \leq \varepsilon$$

donc $z \in h(A)$.

———— x ————

Théorème 2

Sous les hypothèses (3.1) et (3.2), l'espace h(A) est un sous espace hilbertien de ℓ_1.

Démonstration : D'après (3.2), on peut écrire :

$$(3.6) \qquad \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right|^2}{x^{\dagger} A_n x} \geq \frac{|x^{\dagger} \tilde{y}_n|^2}{M \|x\|_\infty^2} \qquad \forall n \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \; x \neq 0$$

En effet d'après (3.2)

$$x^{\dagger} A_n x = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j \leq \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \right| \|x_i| \leq M \|x\|_\infty^2$$

Prenons le sup en x dans (3.6)

$$\tilde{y}_n^{\dagger} A_n \tilde{y}_n \geq \frac{1}{M} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1}}} \frac{|x^{\dagger} \tilde{y}_n|^2}{\|x\|_\infty^2} = \frac{1}{M} \|\tilde{y}_n\|_1^2$$

On passe alors à la limite en x

$$\|y\|_{h(A)}^2 \geq \frac{1}{M} \|y\|_1^2$$

———X———

Remarque 1

En remplaçant (3.2) par une hypothèse adéquate, on récupère des sous-espaces hilbertiens d'autres espaces de suites. Par exemple

$$S_{pq}(A_n) \leq M \qquad \forall n$$

donnera des sous espaces hilbertiens de ℓ_p.

———X———

Voici une autre caractérisation de h(A). Posons

$$(3.7) \qquad \alpha_p(y) = \tilde{y}_p^{\dagger} A_p^{-1} \ell_p - y_{p+1}$$

$$(3.8) \qquad \delta_p = \alpha_{p+1} - \ell_p^{\dagger} A_p^{-1} \ell_p$$

où ℓ_p est défini par :

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} A_p & \ell_p \\ \ell_p^\dagger & \alpha_{p+1} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Proposition 1

On a

$$(y,z) = \frac{y_1 z_1}{\alpha_1} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p(y)\alpha_p(z)}{\delta_p} \tag{3.10}$$

Démonstration

On sait que

$$A_{p+1}^{-1} = \begin{pmatrix} A_p^{-1} + A_p^{-1}\ell_p\delta_p^{-1}\ell_p^\dagger A_p^{-1} & -A_p^{-1}\ell_p\delta_p^{-1} \\ -\delta_p^{-1}\ell_p^\dagger A_p^{-1} & \delta_p^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\tilde{y}_{p+1}^\dagger A_{p+1}^{-1}\tilde{y}_{p+1} = \tilde{y}_p^\dagger A_p^{-1}\tilde{y}_p + \frac{(\tilde{y}_p^\dagger A_p^{-1}\tilde{y}_p - y_{p+1})^2}{\delta_p}$$

Comme $\lim_p \tilde{y}_{p+1}^\dagger A_{p+1}^{-1}\tilde{y}_{p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \Delta(\tilde{y}_{p+1}^\dagger A_{p+1}^{-1}\tilde{y}_{p+1}) + \tilde{y}_1^\dagger A_1^{-1}\tilde{y}_1$

on a bien (3.10)

———X———

2. Approximation stable et convergente

Comparons maintenant h(A) aux espaces $h_n(A)$ de dimension finie constitués par $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

$$(y,z)_n = y^\dagger A_n^{-1} z \tag{3.11}$$

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ $y = (y_1, \ldots, y_n)$ le vecteur $(y_1, \ldots, y_n, 0 \ldots 0 \ldots)$ n'appartient pas en général à h(A). En effet, en général h(A) ne contient pas les vecteurs e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Voici un contre exemple

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_o & -\alpha_o & & & \\ -\alpha_o & \alpha_o+\alpha_1 & -\alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\alpha_{n-1} \\ 0 & & & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}+\alpha_n \end{pmatrix}$$

On suppose $\alpha_n > 0$ et $\sum^{\infty} \alpha_n < \infty$ alors (3.1) et (3.2) sont vérifiés.

On vérifie facilement que

$$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y_o + \ldots + y_n)^2}{\alpha_n}$$

Par contre, voici un moyen de fabriquer une approximation stable et convergente de h(A). (Pour la définition d'une approximation stable et convergente, voir par exemple R. TEMAM [15]).

Posons

$r_n : h(A) \to h_n(A)$ $\qquad r_n y = \tilde{y}_n$

$p_n : h_n(A) \to h(A)$ $\qquad$ si $(y_1 \ldots y_n)^t = \bar{y}_n$

$p_n \bar{y}_n = (z_i)_{i \in N}$ avec

$$(3.12) \qquad \begin{cases} z_i = y_i & i \leq n \\ z_{n+1} = \bar{y}_{n+1}^t A_n^{-1} \ell_n & \\ z_{n+k} = \tilde{z}_{n+k-1}^t A_{n+k-1}^{-1} \ell_{n+k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

Théorème 3

$(h_n(A), p_n, r_n)$ est une approximation stable et convergente de $h(A)$.

Démonstration

$$\|r_n y\|_n^2 = \tilde{y}_n^t A_n^{-1} \tilde{y}_n \leq \|y\|^2 \quad \text{donc} \quad \|r_n\| \leq 1 \qquad \forall n$$

$$\|p_n \bar{y}_n\|^2 = \frac{y_1^2}{a_{11}} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\alpha_p(y)^2}{\delta_p} \qquad \text{d'après (3.10) et (3.12)}$$

$$= \bar{y}_n^t L_n^{-1} \bar{y}_n \qquad \text{d'après la démonstration de la proposition 1}$$

$$= \|\bar{y}_n\|_n^2$$

donc

$$\|p_n\| = 1 \qquad \forall n$$

$$\|y - p_n r_n y\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p(x)^2}{\delta_p}$$

où l'on a posé $x = y - p_n r_n y = (0,\ldots,0,y_{n+1},y_{n+2}-z_{n+2}, \ldots)$

On a

$$\alpha_p(x) = 0 \qquad p \leq n$$

$$\alpha_{n+1}(x) = z_{n+1} - y_{n+1} = \alpha_{n+1}(y)$$

$$\alpha_{n+2}(x) = (0\ldots0,y_{n+1}-z_{n+1})A_{n+1}^{-1}\ell_{n+1} - y_{n+2} + z_{n+2}$$

$$= \tilde{z}_{n+1}^t A_{n+1}^{-1}\ell_{n+1} - (0\ldots0,y_{n+1}-z_{n+1})A_{n+1}^{-1} - y_{n+2}$$

$$= \tilde{y}_{n+1}^t A_{n+1}^{-1}\ell_{n+1} - y_{n+2} = \alpha_{n+2}(y) \ \ldots \text{ etc.}$$

Donc

$$\|y - p_n r_n\|^2 = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_p(y)^2}{\delta_p}$$

qui tend vers zéro comme reste d'une série convergente.

3. Fonctionnelles ponctuelles

Si A vérifie (3.1) et (3.2), h(A) est un sous espace hilbertien de ℓ_1 et

$$|u_k| \leq \|u\|_1 \leq K\|u\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

La forme linéaire $u \to u_k$ est donc continue sur h et d'après le théorème de Riesz, il existe $v^k \in h(A)$, unique, tel que

(3.13) $$(v^k,u) = u_k \qquad \forall u \in h(A)$$

On a le résultat suivant

Proposition 2

v^k est la kème colonne de la matrice A.

Démonstration

Considérons la kème colonne de A $A_{.k} = a_{ik}$ $i \in \mathbb{N}$

Supposons $n \geq k$ $A_n^{-1} (\widetilde{A_{.k}})_n = (0,\ldots 0,1,0\ldots 0)^t$ où le 1 est en kème position. Donc $\tilde{y}_n^t A_n^{-1} (\widetilde{A_{.k}})_n = y_k$ $\forall n \geq k$. En particulier $A_{.k} \in h(A)$ et $\|A_{.k}\|_A^2 = a_{kk}$. Et aussi $(y,A_{.k}) = y_k$ $\forall y \in h(A)$.

———X———

On peut étendre ce résultat aux sous espaces hilbertiens de ℓ_1 construits par la méthode de Schwartz signalée au § 1. Rappelons cette construction :

A est une application symétrique positive de ℓ_∞ dans ℓ_1 $H_o = A(\ell_\infty)$ est muni du produit scalaire

(3.14) $\qquad (u,v)_{H_o} = \langle Au', v' \rangle \qquad$ si $u = Au'$, $v = Av'$.

où $\langle , \rangle$ est la dualité usuelle entre ℓ_1 et ℓ_∞.

Alors le complété H(A) de H_o pour cette norme est un sous espace hilbertien de ℓ_1 (et on les obtient tous ainsi).

On cherche alors $w^i \in H(A)$ tel que

(3.15) $\qquad (w^i, u)_{H(A)} = u_i \qquad \forall u \in H(A)$

Proposition 3

w^i est la ième colonne de A.

Démonstration

Soit $\bar{w}^i$ la ième colonne de A.

$\sup_{u' \in \ell_\infty} \frac{|\langle \bar{w}^i, u' \rangle|}{\langle Lu', u' \rangle^{1/2}} \leq \langle Le_i, e_i \rangle^{1/2}$ d'après l'inégalité de Schwartz, car $\bar{w}^i = Le_i$. On a d'après Schwartz $v \in H(A)$ si

$$\|v\|_{H(A)} = \sup_{u' \in \ell_\infty} \frac{|\langle v, u' \rangle|}{\langle Lu', u' \rangle^{1/2}} < \infty \ ;$$

donc $\bar{w}^i \in H(A)$.

Toute solution de (3.15) vérifie à fortiori

(3.16) $\qquad (w^i, u)_{H_o} = u_i \qquad \forall u \in H_o$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k f'_k = u_i \qquad \forall u \in H_o \quad \text{si} \quad w^i = Lf'$$

Une solution évidente est $f' = e_i$ et par passage à la limite dans (3.16)

$$(Le_i, u)_{H(A)} = u_i \qquad \forall u \in H$$

CHAPITRE 2

oOo

LES ESPACES $h^p(\phi)$

Ce chapitre contient deux résultats de démonstration très technique : le théorème 1 (*) et la proposition 2. Nous avons là une autre approche (très restrictive) du problème de la construction de certains sous espaces hilbertiens de ℓ_1.

Le § 1 définit les espaces $h^p(\phi)$ et caractérise leur inclusion topologique dans ℓ_1. J'y décris également les fonctionnelles ponctuelles pour certains $h^p(\phi)$ les h^p_a.

Au § 2 (**) dans le cas p=1, je fais la liaison entre la construction précédente et celle des espaces h(A) du Chapitre 1 § 3, puis je donne quelques résultats sur les bases de $h^1(\phi)$.

PLAN DU CHAPITRE 2

§ 1 - Les espaces $h^p(\phi)$

1. Définition, inclusion dans ℓ_1 p. 1
2. Complément dans le cas p=0 p. 9
3. Fonctionnelles ponctuelles p. 10

§ 2 - Propriétés particulières de l'espace $h^1(\phi)$

1. Rapport avec les espaces h(A) p. 14
2. Quelques résultats sur les bases dans $h^1(\phi)$ p. 17

dual de $h^1(\phi)$ p. 20

(*) Cette démonstration est parue dans [16]

(**) Certains de ces résultats ont été résumés dans [17]

§ 1 - LES ESPACES $h^p(\phi)$

1. Définition, inclusion dans ℓ_1

Soit ϕ une suite infinie strictement positive : $\phi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit pour p entier l'espace :

$$h^p(\phi) = \{u \in c_o \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^p u_n)^2 \, \phi_n < \infty\}$$

où $\Delta^p u_n$ est la pième différence finie de u_n, c'est-à-dire

$$\Delta^o u_n = u_n \; , \; \Delta u_n = u_{n+1} - u_n \; , \; \Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n) \quad k \geq 1$$

et c_o est l'espace des suites convergentes vers zéro.

Ces espaces ne sont pas les plus généraux de ce type que l'on puisse considérer. On pourrait par exemple remplacer Δ^p par un opérateur aux différences finies à coefficients constants ; nous ne l'avons pas fait.

Il y a également une certaine analogie entre les $h^p(\phi)$ et les espaces de Sobolev à poids. On remarquera à ce propos qu'en général $\Sigma u_n^2 \, \phi_n$ est divergente pour $u \in h^p(\phi) \quad p \geq 1$ et que donc la théorie générale (cf. FOUGERES [18]) ne s'applique pas ici.

"L'intérêt" essentiel des espaces $h^p(\phi)$ est qu'on peut y déterminer explicitement les fonctionnelles ponctuelles, ce dont nous ferons un usage constant au Chapitre 3 pour p = 1.

On a la caractérisation suivante de l'inclusion topologique de $h^p(\phi)$ dans ℓ_1.

Théorème 1

$$h^p(\phi) \subsetneq \ell_1 \quad \text{ssi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2p}}{\phi_n} < \infty$$

(Rappelons que $\subsetneq$ signifie ici que $h^p(\phi)$ est un espace de Hilbert inclus algébriquement et topologiquement dans ℓ_1, et que le produit scalaire sur $h^p(\phi)$ est

$$(1.0) \qquad (u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \Delta^p u_n \Delta^p v_n)$$

Condition suffisante : Supposons donc

$$(1.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2p}}{\phi_n} < \infty$$

Lemme 1

Soit $p \geq 1$. Alors

(1.1) et $u \in h^p(\phi)$ impliquent

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to\infty} n^j \Delta^{j-1} u_n = 0 \quad j = 1 \ldots p$$

Démonstration du lemme : Par récurrence sur p. D'abord pour p = 1. Comme u_n tend vers zéro, on a :

$$|nu_n| \leq \sum_{k\geq n} k\,|\Delta u_k| \leq \left(\sum_{k\geq n} \frac{k^2}{\phi_k}\right)^{1/2} \left(\sum_{k\geq n} \phi_k (\Delta u_k)^2\right)^{1/2} \to 0$$

Si $u \in h^p(\phi)$ $\Delta u \in h^{p-1}(\phi)$ donc de par l'hypothèse de récurrence (1.2) est vérifiée pour j = 1 ... p-1.

Ensuite, on a

$$|n^p \Delta^{p-1} u_n| \leq \sum_{k\geq n} n^p |\Delta^p u_k| \leq \left(\sum_{k\geq n} \frac{k^{2p}}{\phi_k}\right)^{1/2} \left(\sum_{k\geq n} \phi_k (\Delta^p u_k)^2\right)^{1/2} \to 0$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Nous allons maintenant montrer que $h^p(\phi)$ est un espace de Hilbert en construisant une isométrie bijective Φ de $h^p(\phi)$ dans ℓ_2. On pose

$$\Phi(u) = v = (v_n) \qquad \forall u \in h^p(\phi) \qquad \text{avec}$$

$$v_n = \sqrt{\phi_n}\ \Delta^p u_n$$

Si $\Phi(u) = 0$, on a $\Delta^p u_n = 0 \ \forall n$, donc $\Delta^{p-1} u_n = a$ et la condition (1.2) pour $j = p$ implique $a = 0$, alors $\Delta^{p-2} u_n = a$ et on réapplique (1.2) pour $j = p-1$, etc ... Donc $\Phi(u) = 0$ implique $u = 0$. Nous avons également montré que $(u,u) = 0$ implique $u = 0$.

Soit maintenant $v \in \ell_2$.

Définissons u par $\Delta^p u_n = v_n / \sqrt{\phi_n} \ \forall n$ et $\lim_{n\to\infty} \Delta^j u_n = 0$ $j = 0 \ldots p-1$. On a $u \in c_o$ et $\Sigma\ \phi_n (\Delta^p u_n)^2 = \Sigma\ v_n^2$.

Donc Φ est une isométrie surjective.

Reste à établir l'injection algébrique et topologique.

Lemme 2

On a l'identité

$$x_i\ \Delta^p y_i = (-1)^p\ y_{i+p}\ \Delta^p x_i + \Delta\left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j\ \Delta^j x_i\ \Delta^{p-1-j} y_{i+j}\right)$$

(avec la convention pour $p = 0$ que $\sum_{j=0}^{p-1} = 0$)

Démonstration du lemme : Par récurrence sur p

$p = 1 \quad x_i \Delta y_i = x_i (y_{i+1} - y_i) = -y_{i+1}\ (x_{i+1} - x_i) + \Delta(x_i\ y_i)$

Supposons (1.3) vraie jusqu'à p. Alors en appliquant (1.3) pour p = 1, on a

$$x_i \, \Delta^{p+1} y_i = x_i \, \Delta\Delta^p y_i = \Delta(x_i \, \Delta^p \, y_i) - \Delta^p \, y_{i+1} \, \Delta x_i$$

puis en remplaçant $\Delta x_i \, \Delta^p \, y_{i+1}$ par sa valeur tirée de (1.3),on obtient :

$$x_i \, \Delta^{p+1} \, y_i = \Delta(x_i \, \Delta^p \, y_i) - \Delta\left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \, \Delta^{j+1} \, x_i \, \Delta^{p-1-j} \, y_{i+j+1}\right)$$
$$-(-1)^p \, y_{i+p+1} \, \Delta^{p+1} \, x_i$$

qui est la relation cherchée pour p+1.

lemme 2 ——X——

Posons maintenant $s_n = \operatorname{sgn} u_n = \begin{cases} -1 \text{ si } u_n < 0 \\ 0 \text{ si } u_n = 0 \\ 1 \text{ si } u_n > 0 \end{cases}$

On pose $\begin{cases} S_o^o = 0 \\ S_n^o = s_o + \ldots + s_{n-1} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$

puis

$$\begin{cases} S_o^k = 0 \\ S_n^k = S_o^{k-1} + \ldots + S_{n-1}^{k-1} \qquad \forall n \geq 1 \quad k = 1, \ldots, p-1 \end{cases}$$

Comme $\Delta^p \, S_n^{p-1} = \Delta^{p-1} \, S_n^{p-2} = \Delta^1 \, S_n^o = s_n$, on a en appliquant le lemme 2 :

$$|u_n| = u_n s_n = u_n \, \Delta^p \, S_n^{p-1} = (-1)^p \, S_{n+p}^{p-1} \, \Delta^p u_n$$
$$+ \Delta\left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \, \Delta^j u_n \, \Delta^{p-1-j} \, S_{n+j}^{p-1}\right)$$

$$(1.3) \quad \sum_{n=0}^{N} |u_n| = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \, \Delta^j u_{N+1} \, \Delta^{p-1-j} \, S_{N+j+1}^{p-1} + (-1)^p \sum_{n=0}^{N} S_{n+p}^{p-1} \, \Delta^p u_n$$

On a par construction

$$\Delta^{p-1-j}\, S^{p-1}_{N+j+1} = S^{j}_{N+j+1} \quad \text{et il est clair que :}$$

(1.4) $\qquad |S^k_n| \leq n^{k+1}$. D'où

$$|(-1)^j\, \Delta^j u_{N+1}\, \Delta^{p-1-j}\, S^{p-1}_{N+j+1}| \leq (N+j+1)^{j+1}\, |\Delta^j\, u_{N+1}| \qquad j = 0 \ldots p-1$$

Donc toutes ces quantités tendent vers zéro quand N tend vers l'infini d'après le lemme 1.

Utilisant (1.3) et (1.4), on en déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)^p\, \Delta^p u_n \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)^{2p}}{\phi_n} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n\, (\Delta^p u_n)^2 \right]^{1/2}$$

Donc d'après (1.1)

(1.5) $\qquad \|u\|_{\ell_1} \leq K\, \|u\|_{h^p(\phi)}$

Condition nécessaire : Nous supposons donc que (1.5) vérifiée et que $h^p(\phi)$ est un espace de Hilbert. On a

$$\Big| \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Big| \leq \|u\|_{\ell_1} \leq K\, \|u\|_{h^p(\phi)} \qquad \forall u \in h^p(\phi)$$

donc d'après le théorème de Riesz, il existe $v \in h^p(\phi)$ tel que

$$(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \qquad \forall u \in h^p(\phi)$$

Cette relation s'écrit encore

(1.6) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n\, \Delta^p u_n\, \Delta^p v_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \qquad \forall u \in h^p(\phi)$

Plutôt que d'effectuer une étude directe de (1.6), nous allons passer par l'intermédiaire des fonctionnelles ponctuelles v définies par

$$(u, v^q) = u_q \qquad \forall u \in h^p(\phi) \qquad \text{soit encore}$$

$$(1.7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \, \Delta^p u_n \, \Delta^p v_n^q = u_q \qquad \forall u \in h^p(\phi) \qquad \text{avec } v^q = (v_n^q) n \in \mathbb{N}$$

Le lemme suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 3

La solution $v^q = (v_n^q)$ de (1.7) vérifie

$$(1.8)\qquad \phi_n \, \Delta^p \, v_n^q = \begin{cases} (-1)^p \quad C_{n-q+p-1}^{p-1} & \text{si } n \geq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : On écrit le lemme 2 sous la forme

$$\phi_n \, \Delta^p v_n \, \Delta^p u_n = (-1)^p u_{n+p} \, \Delta^p \, (\phi_n \, \Delta^p v_n) + \Delta\left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \, \Delta^k \, (\phi_n \Delta^p v_n) \, \Delta^{p-1-k} u_{n+k} \right)$$

Par sommation

$$(1.7)\qquad \sum_{n=0}^{N} \phi_n \Delta^p v_n \Delta^p u_n = (-1)^p \sum_{n=0}^{N} u_{n+p} \, \Delta^p (\phi_n \Delta^p v_n) + \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \, \Delta^k \, (\phi_n \Delta^p v_n) \, \Delta^{p-1-k} u_{n+k} \right]_{n=0}^{n=N+1}$$

Il est bien connu que

$$\Delta^{p-1-k} u_{n+k} = \sum_{r=0}^{p-1-k} (-1)^r \, C_{p-1-k}^{r} \, u_{n+p-1-r}$$

On peut donc déduire de (1.7) la "formule de Green" :

$$(1.8)\qquad \sum_{n=0}^{N} \phi_n \, \Delta^p v_n \, \Delta^p u_n = (-1)^p \sum_{n=0}^{N} u_{n+p} \, \Delta^p \, (\phi_n \, \Delta^p v_n) + \left[\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-1-j} u_{n+j} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \, C_{p-1-k}^{j-k} \, \Delta^k (\phi_n \Delta^p v_n) \right]_{n=0}^{n=N}$$

Utilisant la relation (1.8) et appliquant (1.7) à $u = e^m$ ($m^{\text{ième}}$ vecteur de base canonique de ℓ_1), on obtient les équations :

$$(1.9)\quad (-1)^p \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} C_{p-1-k}^{j-k} \Delta^k(\phi_0 \Delta^p v_0^q) = \delta_{jq} \qquad j = 0 \ldots p-1$$

$$(1.10)\quad (-1)^p \Delta^p(\phi_n \Delta^p v_n^q) = \delta_{n+pq} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Posons :

$$(1.11)\quad w_n^q = \begin{cases} (-1)^p C_{n-q+p-1}^{p-1} & \text{si } n \geq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et remarquons que

$$C_{n-q+p-1}^{p-1} = \frac{[n-(q-p+1)] \ldots [n-(q-1)]}{(p-1)\ !}$$

donc on peut écrire

$$(1.12)\quad w_n^q = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{[n-(q-p+1)] \ldots [n-(q-1)]}{(p-1)\ !} & \text{si } n \geq q-p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous allons montrer que w^q défini par (1.11) est solution de (1.9) (1.10).

<u>1er cas</u> $q \leq p-1$. Alors (1.12) donne

$$w_n^q = \frac{[n-(q-p+1)]\ldots[n-(q-1)]}{(p-1)\ !} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{donc} \quad \Delta^p w_n^q = 0 \quad \forall n$$

et (1.10) est vérifiée.

D'après (1.11) $w_n^q = 0$ pour $n = 0 \ldots q-1$ donc $\Delta^k w_o = 0$ pour $k = 0 \ldots q-1$ et (1.9) est vérifiée pour $j \leq q-1$. Pour $p-1 \geq j \geq q$ on écrit le premier membre de (1.9) grâce à (1.12) sous la forme :

$$\sum_{k=q}^{j} (-1)^{j-k} C_{p-1-k}^{j-k} C_{p-1-q}^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{j-q} (-1)^k C_{p-1-j+k}^{k} C_{p-1-q}^{p-1-j+k}$$

$$= \sum_{u=0}^{j-q} (-1)^u (-1)^{j-q} C_{p-1-q-u}^{j-q-u} C_{p-1-q}^{p-1-q-u}$$

Posant $p-1-q = r \geq 0$ et $j-q = s \leq r$

$$= \sum_{u=0}^{s} (-1)^u (-1)^s C_{r-u}^{s-u} C_r^{r-u} = (-1)^s C_r^s \sum_{u=0}^{s} (-1)^u C_s^u = (-1)^s C_r^s \delta_{so}$$

Revenant aux notations initiales

$$= (-1)^{j-q} C_{p-1-q}^{j-q} \delta_{j-qo}$$

ce qui prouve que (1.9) est vérifiée pour $p-1 \geq j \geq q$

<u>2ème cas</u> $q \geq p$ Où d'après (1.11) $w_n^q = 0$ si $n < q \leq p$

donc $\Delta^k w_o = 0$ si $k < q \leq p$ et (1.9) est vérifiée.

De (1.12) on tire $\Delta^p w_n^q = 0$ si $n \geq q-p+1$. Reste donc à vérifier (1.10) pour $n = 0, 1, \ldots, q-p$. Or

(1.13) $\Delta^p w_n = \sum_{t=0}^{p} (-1)^{p-t} C_p^t w_{n+t}^q$ $0 \leq n+t \leq q$ et d'après (1.11) w_{n+t}

n'est non nul que si $n+t \geq q$ ie $t \geq q-n$ donc $p \geq q-n$ ie $n \geq q-p$. Donc pour $n < q-p$ (1.10) est vérifiée. Enfin pour $n = q-p$ (1.13) donne

$$\Delta^p w_{q-p}^q = C_p^p w_q^q = (-1)^p$$

Nous avons donc démontré que w_n^q défini par (1.11) est solution du système (1.9) (1.10).

Comme on vérifie immédiatement que la solution du système (1.9) (1.10) ne peut être qu'unique, on a $\phi \Delta^p v^q = w$ et le lemme 3 est démontré.

———X———

On déduit facilement du lemme 3 la solution de (1.6) car on a

$$v_n = \sum_{q=0}^{\infty} v_n^q \quad \text{donc}$$

$$\phi_n \Delta^p v_n = \sum_{q=0}^{\infty} v_n^q = (-1)^p \sum_{q=0}^{n} C_{n-q+p-1}^{p-1} = (-1)^p \sum_{r=0}^{n} C_{p-1+r}^{p-1}$$

Montrons que $v_n = (-1)^p C^n_{p+n}$ par récurrence sur n

$$\sum_{r=0}^{n+1} C^{p-1}_{p-1+r} = \sum_{r=0}^{n} C^{p-1}_{p-1+r} + C^{p-1}_{p+n} = C^n_{p+n} + C^{p-1}_{p+n} = C^n_{p+n} + C^{n+1}_{p+n} = C^{n+1}_{n+p+1}$$

La solution $v = (v_n)$ de (1.6) vérifie donc

$$\phi_n \Delta^p v_n = (-1)^p C^n_{p+n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.14}$$

On a donc $\phi_n |\Delta^p v_n|^2 = \frac{(C^n_{p+n})^2}{\phi_n} = 0\left(\frac{n^{2p}}{\phi_n}\right)$. Alors $v \in h^p(\phi)$ implique (1.1) ce qui achève la démonstration du théorème 1.

———X———

2. Compléments dans le cas p = 0

Voici quelques résultats complémentaires dans le cas où p = 0 et où (1.1) n'est pas vérifiée.

Proposition 1

Soit $\phi_n > 0 \ \forall n$. Posons $\frac{1}{\phi} = \left(\frac{1}{\phi_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et définissons $\tilde{h}^o(\phi) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n u_n^2 < \infty\}$. Alors

i) $\tilde{h}^o(\phi) \subset c_o$ ssi $\frac{1}{\phi} \in \ell_\infty$

ii) $\tilde{h}^o(\phi) \subset \ell_2$ ssi $\frac{1}{\phi} \in \ell_\infty$

iii) Soit $1<r<2$ si $\frac{1}{\phi} \in \ell^{\frac{r}{2-r}}$ $\tilde{h}^o(\phi) \subset \ell_r$

Démonstration : Démontrons d'abord la partie directe du i). Soit une suite u^p d'éléments de $\tilde{h}_o(\phi)$ tendant vers u dans $\tilde{h}_o(\phi)$. Alors $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ tel que $\forall p > P$ on ait :

$$\phi_n |u^p_n - u_n|^2 < \varepsilon \qquad \forall n$$

Si $\frac{1}{\phi} \in \ell_\infty$ $\quad |u_n^p - u_n| < \|\frac{1}{\phi}\|_\infty \varepsilon$ $\quad$ et donc $u \in c_o$

Donc $\frac{1}{\phi} \in \ell_\infty$ implique $\tilde{h}^o(\phi) \subset c_o$. Nous allons démontrer en même temps que iii) que en fait $\frac{1}{\phi} \in \ell_\infty$ implique $h^o(\phi) \subsetneq \ell_2 \subsetneq c_o$. On utilise pour cela l'inégalité

$$(\sum^\infty v_n^r w_n^r)^{1/r} \leq \|v\|_p \|w\|_q \qquad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \qquad p \geq r,\ q \geq r$$

En l'appliquant avec $v = u\sqrt{\phi}$ et $w = \phi^{-1/2}$ $p = 2$ et $q = 2r/(2-r)$, on obtient

$$\|u\|_r \leq (\sum^\infty u_n^2 \phi_n)^{1/2} \|\tfrac{1}{\phi}\|_{\frac{r}{2-r}}$$

Donc si $\frac{1}{\phi} \in \ell_{\frac{r}{2-r}}$ $(1 \leq r \leq 2)$ $h^o(\phi)$ est un sous espace hilbertie de ℓ_r.

Reste la partie réciproque de i). Si $\frac{1}{\phi} \notin \ell_\infty$ on a $\inf_n \phi_n = 0$; on peut donc supposer qu'il existe un ensemble infini K tel que $\mathbb{N}-K$ soit aussi infini et que $\sum_k \phi_{n_k} < \infty$. Alors la suite définie par $u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}-K$, $u_n = 1 \quad \forall n \in K$ est dans $\tilde{h}_o(\phi)$ mais pas dans c_o.

———X———

3. Fonctionnelles ponctuelles

Nous allons maintenant donner l'expression des fonctionnell ponctuelles dans $h^p(\phi)$ pour $\phi_n = \frac{1}{a^n}$. Cet espace sera noté h_a^p.

Pour que (1.1) soit vérifiée, il est nécessaire et suffisar que $0<a<1$, ce que nous supposerons. Les fonctionnelles ponctuelles sont solutions du système (1.7) et d'après le lemme 3, elles vérifient (1.8) donc

$$(1.15)\qquad \Delta^p v_n^q = \begin{cases} (-1)^p\, a^n\, C_{n-q+p-1}^{p-1} & \text{si } n \geq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et aussi les conditions aux limites du lemme 1, i.e :

$$(1.16)\qquad \lim_{n\to\infty} n^j\, \Delta^{j-1} v_n^q = 0 \qquad j = 1 \ldots p$$

Nous allons déterminer une solution de (1.15) (1.16) sous la forme

$$(1.17)\qquad \begin{cases} v_n^q = (-1)^p\, a^n\, P_{n,q}(\alpha) & n \geq q \quad \text{où} \\ P_{n,q}(\alpha) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k\, C_{n-q+p-1}^k \end{cases}$$

Il est facile de vérifier par récurrence la formule :

$$(1.18)\qquad \Delta^p\, x_n y_n = \sum_{\ell=0}^{p} C_p^\ell\, \Delta^{p-\ell} x_{n+\ell}\, \Delta^\ell y_n$$

Après quelques calculs, on déduit de (1.17) (1.18) et $\forall n \geq c$

$$(1.19)\qquad \Delta^p v_n^q = (-1)^p a_n \sum_{n=0}^{p-1} C_{n-q+p-1}^r \sum_{\ell=0}^{p-1-r} \alpha_{r+\ell}\, (a-1)^{p-\ell} a^\ell\, C_p^\ell$$

Alors (1.15) fournit le système déterminant les α_i

$$(1.20)\qquad \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{p-1-r} \alpha_{r+\ell}\, (a-1)^{p-\ell}\, a^\ell\, C_p^\ell = 0 \qquad r = 0 \ldots p-2 \\ \alpha_{p-1}\, (a-1)^p\, C_p^o = 1 \end{cases}$$

Posons $\beta_j = \alpha_j (a-1)^{p-j} a^j \qquad j = 0 \ldots p-1$. Les β_j sont solutic du système

$$(1.21)\qquad \begin{pmatrix} C_p^o & C_p^1 & \cdots & C_p^{p-1} \\ & C_p^o & \cdots & C_p^{p-2} \\ & & & \vdots \\ 0 & & & C_p^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_o \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{a}{a-1}\right)^{p-}$$

Lemme 4

La solution de (1.21) est $\beta_{p-j} = (-1)^{j+1} C_{p+j-2}^{j-1} \left(\frac{a}{a-1}\right)^{p-1} \quad \forall j=1..p$

Démonstration : Par récurrence. $j=1$, c'est évident. Ensuite

$$\beta_{p-(j+1)} = -\sum_{k=1}^{j} {}_{p-k}C_{p}^{j+1-k} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^k C_{p+k-2}^{k-1} C_{p}^{j+1-k} \left(\frac{a}{a-1}\right)^{p-1}$$

$$= \left[-\sum_{u=0}^{j} (-1)^u C_{p+u-1}^{u} C_{p}^{j-u} + (-1)^{j+2} C_{p+j-1}^{j} \right] \left(\frac{a}{a-1}\right)^{p-1}$$

et on vérifie que :

$$(1.22) \quad \sum_{u=0}^{j} (-1)^u C_{p+u-1}^{u} C_{p}^{j-u} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p$$

———X———

On a donc maintenant

$$\alpha_j = (a-1)^{j+1-2p} a^{p-1-j} (-1)^{p-j+1} C_{2p-j-2}^{p-j-1} \qquad 0 \leq j \leq p-1$$

c'est-à-dire

$$v_n^q = \frac{a^n}{(1-a)^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-q+p-1}^{k} C_{2p-2-k}^{p-1} (1-a)^k a^{p-1-k} \qquad \forall n \geq q$$

Comme d'autre part $v_n^q = (v^q, v^n)_{h^p(\phi)}$ on a donc

$$v_n^q = (-1)^p a^q P_{q,n}(\alpha) \quad \text{pour } 0 \leq q \leq n$$

Nous résumons ces résultats dans la :

Proposition 2

La suite v^q telle que $(v^q, u)_{h_a^p} = u_q \qquad \forall u \in h_a^p$

a pour composantes

$$(1.23)\begin{cases} v_n^q = \dfrac{a^n}{(1-a)^{2p-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} C_{n-q+p-1}^{k}\, C_{2p-2-k}^{p-1}\, (1-a)^k\, a^{p-1-k} & \text{si } n \geq q \text{ et} \\ v_n^q = \dfrac{a^q}{(1-a)^{2p-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} C_{q-n+p-1}^{k}\, C_{2p-2-k}^{p-1}\, (1-a)^k\, a^{p-1-k} & \text{si } n \leq q \end{cases}$$

———X———

Remarque : Pour p = 1 (1.23) donne les fonctionnelles ponctuelles sur h_a^1 qui seront utilisées au chapitre 3

$$v_n^q = \frac{a^q}{1-a} \qquad n < q$$

$$v_n^q = \frac{a^n}{1-a} \qquad n \geq q$$

Pour p = 2 (1.23) donne

$$v_n^q = \frac{a^q}{(1-a)^3}\,[2a + (1-a)\,(q-n+1)] \qquad n < q$$

$$v_n^q = \frac{a^n}{(1-a)^3}\,[2a + (1-a)\,(n-q+1)] \qquad n \geq q$$

Ce résultat est décourageant au sens suivant : la matrice de Gramm pour p=2 n'est pas factorisable (elle est somme de deux matrices factorisables) et nous ne savons pas l'inverser explicitement. C'est pourquoi au Chapitre 3 nous ne pourrons complètement traiter le problème de l'existence de formule optimale de sommation dans $h^p(\phi)$ (ni h_a^p), pour $p \geq 2$.

§ 2 - PROPRIETES PARTICULIERES DE L'ESPACE $h^1(\phi)$

1. Rapport avec les espaces h(A)

Nous supposons (1.1) vérifiée, c'est-à-dire que nous considérons

$$h^1(\phi) = \{u \in c_o, \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n (\Delta u_n)^2 < \infty\}$$

avec la condition

$$(2.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\phi_n} < \infty \qquad (\phi_n > 0 \quad \forall n)$$

Nous avons donné au Chapitre 1 § 3 une méthode de construc d'un sous espace hilbertien en considérant une matrice infinie A dont les tronquées de rang n A_n sont symétriques définies positives pour tout n.

Proposition 1

$h^1(\phi)$ est l'espace h(A) introduit au Chapitre 1 § 3 où

$$(2.2) \qquad A_n = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1 & \theta_1 & \cdots & \theta_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \theta_n & \cdots & \cdots & \theta_n \end{pmatrix} \qquad \text{où l'on a posé}$$

$$(2.3) \qquad \frac{-1}{\Delta\theta_n} = \phi_n \qquad \forall n$$

(Nous noterons aussi cet espace $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$)

Démonstration : Appelons $\tilde{y}_n$ le vecteur colonne de composantes $y_0, y_1, \ldots,$

On obtient facilement

$$\tilde{y}_n^t A_n \tilde{y}_n = - \Delta\theta_o y_o^2 \ldots - \Delta\theta_{n-1} (y_o + \ldots + y_{n-1})^2 + \theta_n (y_o + \ldots + y_n)^2$$

Donc A_n est définie positive pour tout n.

La condition $\sum_{i,j} |a_{ij}| < \infty$ s'écrit ici

$$(2.4) \qquad \sum_n n\theta_n < \infty$$

Or, on a l'identité

$$-\sum_{n=0}^{N} C_n^2 \Delta\theta_n = \sum_{n=0}^{N} n\,\theta_{n+1} + C_{N+1}^2\,\theta_{N+1}$$

i.e

$$(2.5) \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n^2}{\phi_n} = \sum_{n=0}^{N} n\theta_{n+1} + C_{N+1}^2\,\theta_{N+1}$$

Si (2.1) est vérifiée $\theta_n = -\sum_{p=n}^{\infty} \Delta\theta_p$

$$C_n^2\,\theta_n \leq \sum_{p=n}^{\infty} -C_p^2\,\Delta\theta_p \to 0$$

donc d'après (2.5), (2.4) est vérifiée.

Réciproquement, si on a (2.4) et si (2.1) est faux, alors d'après (2.5) $\lim_{n\to\infty} n^2\,\theta_n = \infty$ donc $\Sigma n\theta_n > \Sigma\frac{1}{n} = \infty$ contradiction. Nous avons donc montré que les conditions (2.4) et (2.1) sont équivalentes. D'après le théorème 2 Chapitre 1, h(A) est alors un sous espace hilbertien de ℓ_1.

Soit $y \in h(A)$. Par définition

$$(2.6) \qquad \|y\|^2_{h(A)} = \sup \tilde{y}_n^t\, A_n^{-1}\, \tilde{y}_n < \infty$$

La matrice A_n définie en (2.2) est un cas particulier de matrice factorisable que nous avons définie au Chapitre 1 § 2. Il est ici très facile d'inverser cette matrice et d'obtenir

$$(2.7)\quad A_n^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta\theta_0} & \frac{1}{\Delta\theta_0} & & & 0 \\ \frac{1}{\Delta\theta_0} & -\left(\frac{1}{\Delta\theta_0}+\frac{1}{\Delta\theta_1}\right) & \frac{1}{\Delta\theta_1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\Delta\theta_{n-2}} & -\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-2}}+\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right) & \frac{1}{\Delta\theta_{n-1}} \\ 0 & & & \frac{1}{\Delta\theta_{n-1}} & -\frac{n-1}{\Delta\theta_n}\quad\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

D'où $\|y\|^2_{h(A)} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{N-1} -\frac{(\Delta y_n)^2}{\Delta\theta_n} + \frac{y_N^2}{\theta_N}\right)$

Comme cette limite existe, la série $\Sigma -\frac{(\Delta y_n)^2}{\Delta\theta_n}$ converge

et on a

$$\|y\|^2_{h(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta y_n)^2}{-\Delta\theta_n} + \lim_{n\to\infty}\frac{y_n^2}{\theta_n}$$

θ_n tendant vers 0, on a à fortiori $y_n \to 0$ donc

$$(2.8)\quad y_n = -\sum_{p\geq n}\Delta y_p \leq \left(\sum_{p\geq n} -\Delta\theta_p \sum_{p\geq n}\frac{(\Delta y_p)^2}{-\Delta\theta_p}\right)^{1/2}$$

i.e

$$\frac{y_n^2}{\theta_n} \leq \sum_{p\geq n}\frac{(\Delta y_p)^2}{-\Delta\theta_p} \to 0$$

Donc $y \in h^1(\phi)$ et $\|y\|_{h(A)} = \|y\|_{h^1(\phi)}$

Réciproquement, soit $y \in h^1(\phi)$, alors $y \in c_o$ et on peut encore écrire (2.8) et achever comme précédemment.

On déduit alors immédiatement de la proposition 2 Chapitre 1 :

Proposition 2

Les fonctionnelles ponctuelles sur $h^{-1}(\phi) = h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$ sont données par

$$(v^k,u)_{h^1(\phi)} = u_k \qquad \forall u \in h^1(\phi)$$

où

$$v_n^k = \theta_k \qquad k \geq n \qquad (\theta_n \text{ défini par (2.3)})$$

$$v_n^k = \theta_n \qquad k \leq n$$

(Pour $\phi_n = \frac{1}{a^n}$ on retrouve le résultat obtenu à la proposition 2 § 1 pour $p = 1$)

———×———

2. Quelques résultats sur les bases de $h^1(\phi)$

Soit E un espace de Banach séparable. Une base forte de E est une famille dénombrable $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que tout $x \in E$ s'écrive de manière unique

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\, b_i \qquad a_i(x) \in \mathbb{R}$$

Considérons $h(\phi)$ avec la condition (2.1) vérifiée. Considérons la condition supplémentaire

$$(2.9) \qquad \phi_p \sum_{p>n} \frac{1}{\phi_n} < K \qquad \forall p$$

Remarque : Si l'on pose $\phi_p = \frac{-1}{\Delta\theta_p}$ comme en (2.3), ce que nous ferons au Chapitre 3, (2.9) équivaut à

$$\frac{\theta_{p+1}}{\theta_p} \leq \frac{K}{K+1} < 1$$

Proposition 3

Si ϕ vérifie (2.9), alors e_i (base canonique de ℓ_1) est une base forte de $h^1(\phi)$.

Démonstration :

$$\|y - \sum_{i\leq p} y_i\, e_i\|^2_{h^1(\phi)} = \phi_p\, y_{p+1}^2 + \sum_{i>p} \phi_i\, (\Delta y_i)^2$$

$$|y_{p+1}| = \left|-\sum_{n>p} \Delta y_n\right| \leq \left(\sum_{n>p} \phi_n\, (\Delta y_n)^2 \sum_{n>p} \frac{1}{\phi_n}\right)^{1/2} \quad , \quad \text{donc}$$

$$\|y - \sum_{i\leq p} y_i\, e_i\|^2 \leq (K+1) \sum_{i>p} \phi_i\, (\Delta y_i)^2 \to 0$$

———×———

Remarque : En général, même si (2.1) est vérifiée, e_i n'est pas une base forte de $h^1(\phi)$. En effet, prenons

$$y_p = \sum_{n\geq p} \frac{n}{\phi_n} \quad \text{alors} \quad \Delta y_n = \frac{-n}{\phi_n} \quad \text{et}$$

$$\|y - \sum_{n<p} y_i\, e_i\|^2_{h^1(\phi)} = \phi_p \left(\sum_{n>p} \frac{n}{\phi_n}\right)^2 + \sum_{n>p} \frac{n^2}{\phi_n}$$

Autrement dit, si e_i est une base forte $\lim_{p\to\infty} \phi_p \left(\sum_{n>p} \frac{n}{\phi_n}\right)^2 =$ et cette condition n'est pas vérifiée pour $\phi_n = n^\alpha$ $(3<\alpha\leq 4)$

———×———

Partant du système libre des e_i, on peut construire le systè orthonormal associé par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Il est à peu près immédiat que ce système f_j est donné par

$$f_j = \frac{e_o + \ldots + e_j}{\sqrt{\phi_j}} \qquad \forall j \tag{2.10}$$

En particulier

$$(y,f_n)_{h^1(\phi)} = \phi_n \frac{-1}{\sqrt{\phi_n}} \Delta y_n = -\sqrt{\phi_n}\, \Delta y_n$$

et par conséquent

$$\|y\|^2_{h^1(\phi)} = \Sigma \phi_n (\Delta y_n)^2 = \Sigma(-\sqrt{\phi_n}\, \Delta y_n)^2 = \Sigma (y,f_n)^2_{h^1(\phi)}$$

Proposition 4

Les f_j définis par (2.10) forment une base hilbertienne de $h^1(\phi)$.

———X———

Examinons maintenant quand les représentants v^n des fonctionnelles ponctuelles forment une base forte de $h^1(\phi)$.

Proposition 5

Les v^n forment une base forte de $h^1(\phi)$ ssi (2.9) est vérifiée :

Démonstration : De la proposition 2, on tire

$$v^{n+1} - v^n = -\frac{1}{\phi_n}(e_o + \ldots + e_n) = -\frac{1}{\sqrt{\phi_n}}\, f_n$$

$$y - \sum_{n\leq p} (y,e_n)\, v^n = y + \sum_{n=0}^{p} (y, f_n \sqrt{\phi_n})\, (v^{n+1} - v^n) - (y, f_p \sqrt{\phi_p})\, v^p$$

$$= y - \sum_{n=0}^{p} (v,f_n)\, f_n - (y, f_p \sqrt{\phi_p})\, v^p$$

Donc les v^n forment une base forte ssi $\lim_{p\to 0} (y, f_p \sqrt{\phi_p}) \|v^p\| = 0 \quad \forall y \in h^1(\phi)$. Or, on a d'après la proposition 3

$$|(y, f_p \sqrt{\phi_p})|\, \|v^p\| = \phi_p\, \Delta y_p \sqrt{\theta_p} \quad \text{avec toujours} \quad -\frac{1}{\Delta\theta_n} = \phi_n \quad \forall n$$

$$= \left[\phi_p (\Delta y_p)^2 \cdot \phi_p \sum_{n\geq p} \frac{1}{\phi_n} \right]^{1/2}$$

Cette quantité tend bien vers 0 si (2.9) est vérifiée.

Réciproquement, si cette quantité tend vers 0 pour tout $y \in h^1(\phi)$ on a

(2.11) $\quad z_p\, \omega_p \to 0 \quad \forall z \in \ell_1^+ = \{y \in \ell_1 \; ; \; y_i \geq 0 \;\; \forall i\}$

en posant $\phi_p |\Delta y_p|^2 = z_p$ (on a vu au § 1 que $z_p \in \ell_2$)

et $\omega_p = \phi_p \sum\limits_{n \geq p} \frac{1}{\phi_n}$. Or, la relation (2.11) implique $\omega_p < K$ sinon il existerait une suite $\omega_{p_i} \to \infty$. On peut en extrayant une sous suite supposer $\sum\limits_i \frac{1}{\omega_{p_i}} < \infty$. Posant alors

$z_p = 0 \quad$ si $p \neq p_i$

$= \frac{1}{\omega_p} \quad$ si $p = p_i \quad$ on a $z \in \ell_1^+$ et $z_p\, \omega_p \neq 0$

———X———

On peut en déduire une dualité de $h^1(\phi)$.

Proposition 6

Si ϕ vérifie (2.1) (2.9), $h^1(\phi)$ et $h^{-1}(\phi) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \; ; \; \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(y_o + \ldots + y_n)^2}{\phi_n} < \infty\}$ muni du produit scalaire

$$(y,z)_{h^{-1}(\phi)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(y_o + \ldots + y_n)(z_o + \ldots + z_n)}{\phi_n}$$

sont deux espaces en dualité pour la forme bilinéaire $\langle y,z \rangle = \sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i\, z_i$.

Démonstration : Posons $V_o = 0 \quad V_i = v_o + \ldots + v_{i-1} \quad i \geq 1$

$$(2.12)\qquad \sum_{i=0}^{N} u_i v_i = \sum_{i=0}^{N} u_i \Delta V_i = u_{N+1} V_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} \frac{v_o+\ldots+v_i}{\sqrt{\varphi_i}} \sqrt{\varphi_i}\, \Delta u_i$$

$$\left| \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \right| \le |V_{N+1}| \sum_{j>N} |\Delta u_j| + \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{(v_o+\ldots+v_i)^2}{\phi_i} \sum_{i=0}^{N} \phi_i (\Delta u_i)^2 \right)$$

$$\le \frac{|V_{N+1}|}{\phi_N} \left(\sum_{j>N} |\Delta u_j|^2 \phi_j \cdot \phi_N \sum_{j>N} \frac{1}{\phi_j} \right)^{1/2} + \ldots$$

$$\le \|v\|_{h^{-1}(\phi)} \|u\|_{h(\phi)} \left[\left(\phi_N \sum_{j\ge N} \frac{1}{\phi_j} \right)^{1/2} + 1 \right]$$

Si (2.9) est vérifiée, tout élément de $h^{-1}(\phi)$ définit une forme linéaire continue sur $h^1(\phi)$.

Réciproquement, soit $\ell \in h^1(\phi)'$. D'après (2.9), e_i est une base forte de $h^1(\phi)$ i.e $\ell(u) = \sum_{i\ge 0} u_i \ell(e_i)$ $\quad \forall u = \sum_{i\ge 0} u_i e_i$

Posons $\ell(e_i) = v_i$

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} v_i u_i \right| \le \|\ell\| \|u\|_{h^1(\phi)} \qquad \forall u \in \in h^1(\phi)$$

Utilisant (2.12) avec $u_n = 0 \quad n > N$

$$\frac{\left| \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{v_o+\ldots+v_i}{\sqrt{\phi_i}} \right) \sqrt{\phi_i}\, \Delta u_i \right|}{\left(\sum_{i=0}^{N} \phi_i \Delta u_i^2 \right)^{1/2}} \le \|\ell\| \qquad \forall u \in \mathbb{R}^N$$

Prenant le sup pour $u \in \mathbb{R}^N$

$$\left[\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{v_o+\ldots+v_i}{\phi_i} \right)^2 \right]^{1/2} \le \|\ell\| \qquad \forall N$$

et donc $v \in h^{-1}(\phi)$.

CHAPITRE 3

oOo

EXISTENCE DE FORMULES OPTIMALES

Dans le § 1, je définis une formule optimale de calcul d'une fonctionnelle et en particulier une formule optimale de sommation d'une série. Le § 2 contient quelques exemples simples d'existence et de non unicité de formules optimales de sommation. Au § 3, je démontre le théorème d'existence d'une formule optimale de calcul pour toute fonctionnelle sur l'espace $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$. Comme ce théorème n'est pas constructif, je donne au § 4 un théorème constructif pour l'espace h_a ainsi qu'un résultat plus élémentaire (proposition 6) et assez utile. Le § 5 contient quelques exemples numériques.

PLAN DU CHAPITRE 3

§ 1 - Définitions et problèmes p. 1
Formules optimales de calcul, de sommation avec et sans contraintes. p. 2

§ 2 - Premiers essais de résolution du problème 2 p. 3
1. $E = \ell_1$ p. 3
2. $E = \ell_1(\phi)$ p. 4
3. $E = h^\circ(\phi)$ p. 6

§ 3 - Existence d'une approximation optimale pour toute fonctionnelle sur l'espace $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$. p. 8

§ 4 - Construction d'une formule optimale de sommation d'une série dans h_a. p. 14

§ 5 - Quelques exemples numériques. p. 22

§ 1 - DEFINITIONS ET PROBLEMES

Soit u une série convergente de somme $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = s$. On veut calculer une valeur approchée de s à l'aide d'une expression du type $\sum_{i=0}^{N} A_i u_{n_i}$.

Plus généralement si L est une fonctionnelle définie sur un certain espace vectoriel normé de séries convergentes, on veut calculer $L(u) = \ell$ à l'aide d'une expression du type $\sum_{i=0}^{N} A_i u_{n_i}$ (N fixé).

On considère dans ce but un espace vectoriel normé E de séries convergentes ; on suppose L (respectivement $u \to \sum_{i=0}^{\infty} u_i$) continues sur E. On suppose également les fonctionnelles ponctuelles (i.e $u \to u_i$ i fixé) continues $\forall i \in \mathbb{N}$. Il existe alors des éléments v^L, v, v^i du dual topologique E' de E tels que

$$(1.1) \quad \begin{cases} a) & \langle v^L, u\rangle = L(u) & \forall u \in E \\ b) & \langle v, u\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} u_i & \forall u \in E \\ c) & \langle v^i, u\rangle = u_i & \forall u \in E \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$\left| L(u) - \sum_{i=0}^{N} A_i u_{n_i} \right| \leq \| v^L - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i} \|_E' \, \|u\|_E$$

Définition 1

On appelle formule de calcul de L (ou de sommation quand $L(u) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$) un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ où $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $\mathcal{N} \in \mathbb{N}^{N+1}$ et $0 \leq n_0 < n_1 \ldots < n_N$.

On considère alors trois problèmes (N fixé).

Problème 1 - Déterminer $\bar{\mathcal{A}}$ tel que

$$\|v^L - \sum_{i=0}^{N} \bar{A}_i \, v^{n_i}\| \leq \|v^L - \sum_{i=0}^{N} A_i \, v^{n_i}\| \qquad \forall \mathcal{A} \quad \text{(les } n_i \text{ étant fixés)}$$

Problème 2 - Déterminer $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{N}})$ tels que

$$\|v^L - \sum_{i=0}^{N} \bar{A}_i \, v^{\bar{n}_i}\| \leq \|v^L - \sum_{i=0}^{N} A_i \, v^{n_i}\| \qquad \forall (\mathcal{A}, \mathcal{N})$$

Problème 3 - Même énoncé que le problème 2 avec en plus la contrainte

$$n_i \leq K \qquad i=0 \ldots N \qquad \text{(K donné)}$$

Définition 2

Une formule $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{N}})$ solution du problème 2 est appelée formule optimale de calcul de L (de sommation quand $L(u) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$).

Définition 3

$\|v^L - \sum_{i=0}^{N} A_i \, v^{n_i}\|_E$, est appelée norme de l'erreur.

Remarque 1 - Ces définitions sont calquées sur celles des formules optimale d'intégration. Cette remarque triviale est d'ailleurs à l'origine de ce travail. Pour le point sur la situation actuelle sur les formules optimales d'intégration, on se reportera à la thèse de M. DUC-JACQUET [6].

Remarque 2 - Le problème 1 est de loin le plus élémentaire des trois. (En particulier si E est un espace de Hilbert, il est linéaire en les inconnues A_i). C'est un problème de projection sur un sous espace de dimension finie dans un espace vectoriel normé. On connaît dans ce cadre un grand nombre de résultats en général très théoriques et trop peu explicites pour être

utilisés avec commodité (*), dont on trouvera un exposé dans le livre de I. SINGER [22]. Nous ne traiterons le problème 1 que comme intermédiaire dans nos calculs et ce sera alors toujours dans le cas où E est un espace de Hilbert. Dans ce cas, il est bien connu que les A_i sont solutions du système de Gramm :

$$(1.2)\quad \begin{pmatrix} (v^{n_o}, v^{n_o}) & (v^{n_o}, v^{n_1}) & \dots & (v^{n_o}, v^{n_N}) \\ (v^{n_1}, v^{n_o}) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ (v^{n_N}, v^{n_o}) & \dots & & (v^{n_N}, v^{n_N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_o \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v^L, v^{n_o}) \\ \vdots \\ (v^L, v^{n_N}) \end{pmatrix}$$

Le problème 1 a été formulé de manière générale initialement par A. SARD [21] pour les meilleures formules d'intégration approchée.

———X———

De manière à assurer (1.1 b) et 1.1 c), nous supposerons dans toute la suite $E \subset \ell_1$; nous pourrons alors utiliser les résultats du Chapitre 2 sur les sous espaces hilbertiens de ℓ_1. En fait, nous montrons au § 3 que le problème 2 admet une solution au moins dans l'espace $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$ introduit au Chapitre 2 § 2. La méthode enmployée n'étant pas constructive, nous prouvons au § 4 l'existence d'une formule optimale par un procédé constructif dans l'espace h_a. Auparavant, nous allons donner des réponses "naïves" au problème 2.

§ 2 - PREMIERS ESSAIS DE RESOLUTION DU PROBLEME 2

1) Il paraît naturel de tenter de prendre $E = \ell_1$. On peut prévoir que cet espace étant "trop grand", le résultat sera décevant (existence mais pas d'unicité, valeur trop faible de la norme de l'erreur).

On a alors $E' = \ell_\infty$ et si l'on met E et E' en dualité

par $\langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i \qquad \forall u \in \ell_1 \qquad \forall v \in \ell_\infty$

les solutions des problèmes (1.1 b) et (1.1 c) sont respectivement

$$v = (v_n) \qquad v_n = 1 \quad \forall n$$

$$v^i = (v^i_n) \qquad v^i_n = \delta_{in} \qquad (\delta_{in} \text{ est le symbole de Kronecker})$$

Alors

$$\| v - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i} \|_{\ell_\infty} = \sup (1, |1-A_o|, \ldots, |1-A_N|)$$

Toute formule $(\mathcal{R}, \mathcal{N})$ où $|1-A_i| \leq 1$ (i.e $0 \leq A_i \leq 2$) et $\mathcal{N}$ est quelconque est alors optimale et la norme de l'erreur vaut 1 ce qui est un résultat décevant à tous points de vue.

2) On peut alors tenter de restreindre E en posant

$b(\phi) = \{u=(u_n) \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n |u_n| < \infty\}$ où $\phi_n > 0 \qquad \forall n$

Il est clair que $b(\phi)$ est un espace de Banach pour

$$\|u\|_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n |u_n|$$

On vérifie de plus sans difficulté que son dual pour

$\langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$ est

$$b'(\phi) = \{v=(v_n), \sup_n \frac{1}{\phi_n} |v_n| < \infty\}$$

normé par

$$\|v\|'_\phi = \sup_n \frac{1}{\phi_n} |v_n|$$

Proposition 1

$$b(\phi) \subset \ell_1 \quad \text{ssi} \quad \inf_n \phi_n \geq K > 0$$

Démonstration :

Si $\inf \phi_n \geq K$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \leq \sup_n \frac{1}{\phi_n} \sum_n \phi_n |u_n| \leq \frac{1}{K} \|u\|_\phi$$

Réciproquement : Si $b(\phi) \subset \ell_1$, la fonctionnelle somme admet un représentant v solution de (1.1 b) donc

$$v = (v_n) \quad \text{et} \quad v_n = 1$$

Alors $v \in b'(\phi)$ i.e $\|v\|'_\phi = \sup_n \frac{1}{\phi_n} \leq K_1$

———X———

La résolution du problème 2 peut alors se faire dans ce cadre.

Proposition 2

Si $0<\phi_n<\phi_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, le problème 2 admet la solution

(2.1) $\bar{n}_i = i \quad |1-\bar{A}_i| \leq \frac{\phi_i}{\phi_{N+1}}$ (Remarquer que $\bar{\mathcal{N}}$ est unique mais pas $\bar{\mathcal{A}}$).

Dans ces conditions, l'erreur est $e = \frac{1}{\phi_{N+1}}$.

Démonstration :

On a d'après (1.1 c) $v^i = (v^i_n)$ avec $v^i_n = \delta_{in}$

donc

$$\|v - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i}\|'_\phi = \sup_n \frac{1}{\phi_n} |1 - \sum_{i=0}^{N} A_i \delta_{nn_i}|$$

(2.1 bis) $$\|v - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i}\|'_\phi = \sup_n \left(\sup_{n \neq n_i \atop i=0\ldots N} \frac{1}{\phi_n} , \sup_{i=0\ldots N} \frac{|1-A_i|}{\phi_{n_i}} \right)$$

Soit i_o le plus petit entier strictement inférieur à N+1 tel que $n_{i_o} \neq i_o$; alors $\sup_{\substack{n \neq n_i \\ i=0\ldots N}} \frac{1}{\phi_n} = \frac{1}{\phi_{i_o}}$ et d'après (2.1 bis) :

$\| v - \sum_{i=1}^{N} A_i v^{n_i} \|'_\phi \geq \frac{1}{\phi_{i_o}} > \frac{1}{\phi_{N+1}}$. Cela prouve que $\bar{n}_i = i$.

Considérons maintenant un A_i tel que $|1-A_i| > \frac{\phi_i}{\phi_{N+1}}$ on a $\bar{n}_i = i$

donc $\frac{|1-A_i|}{\phi_{n_i}} > \frac{\phi_i}{\phi_{n_i}} \quad \frac{1}{\phi_{N+1}} = \frac{1}{\phi_{N+1}}$ et d'après (2.1 bis) cela entraîne

$$\| v - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i} \|'_\phi > \frac{1}{\phi_{N+1}} = \| v - \sum_{i=0}^{N} \bar{A}_i v^{\bar{n}_i} \|'_\phi$$

———×

Remarque 3 - Ce résultat peut éventuellement avoir un intérêt pratique pour ϕ_n tendant rapidement vers l'infini car alors l'erreur tend rapidement vers zéro. Par contre, il n'y a pas unicité pour les A_i. Leur choix, sous réserve de vérifier (2.1), est sans influence sur la qualité de la formule de meilleure approximation.

C'est pour cette raison-et aussi parce que les cas où E est un Banach de suites et la norme duale facile à manipuler sont rares - que nous nous placerons dans des espaces de Hilbert ; pour des n_i fixés, il y aura alors (formule (1.2)) unicité des A_i. Nous ne pourrons rien dire de l'unicité des n_i car il s'agit d'un problème en nombre entiers.

3) Voici enfin, dans cette optique, un exemple élémentaire de sous espace hilbertien de ℓ_1 pour lequel le problème 2 admet une solution unique.

Posons $h^\circ(\phi) = \{u=(u_n)_{n \in \mathbb{N}} ; \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n u_n^2 < \infty\}$

avec $\phi_n > 0 \quad \forall n$.

Proposition 3

$h^\circ(\phi)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u,v)^\circ_\phi = \sum_{n=1} \phi_n u_n v_n$ et de plus

$$h^\circ(\phi) \subset \ell_1 \quad \text{ssi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi_n} < \infty$$

Démonstration : Cette proposition est un cas particulier du théorème 1 Chapitre 2.

Proposition 4

On suppose ϕ_n croissante strictement. Alors le problème 2 admet une solution unique dans $h^\circ(\phi)$.

Démonstration : Nous identifions $h^\circ(\phi)$ et son dual ; on voit alors que v et v^i solutions respectives de (1.1 b) et (1.1 c) sont données par

$v_n = \frac{1}{\phi_n}$ et $v^i_n = \frac{\delta_{n_i}}{\phi_i}$ $\forall n$ (i fixé). Alors

$$\|v - \sum_{i=0}^{N} A_i v^{n_i}\|^2_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left(\frac{1}{\phi_n} - \sum_{i=0}^{N} A_i \frac{\delta_{nn_i}}{\phi_{n_i}}\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{(1-A_i)^2}{\phi_{n_i}} + \sum_{n \neq n_i \atop i=0\ldots N} \frac{1}{\phi_n}$$

Pour minimiser cette quantité, il faut donc prendre $A_i = 1$ $i = 0\ldots N$ et $n_i = i$ $i = 0\ldots N$.

———X———

§ 3 - EXISTENCE D'UNE APPROXIMATION OPTIMALE POUR TOUTE FONCTIONNELLE SUR L'ESPACE $h^1(-\frac{1}{\Delta\theta})$

Soit θ_n une suite strictement décroissante et positive telle que $\sum_{n=0}^{\infty} n\theta_n < \infty$. Nous avons vu au Chapitre 2 proposition 1 que l'espace :

$$h^1(-\frac{1}{\Delta\theta}) = \{u=\{u_n\}\ n \in N,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta u_n)^2}{-\Delta\theta_n} < \infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$$

est un sous espace hilbertien de ℓ_1 pour le produit sclaire

$$(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta u_n\ \Delta v_n}{-\Delta\theta_n}$$

Soit ℓ une fonctionnelle linéaire continue sur $h^1(-\frac{1}{\Delta\theta})$. On note dans ce § w l'élément v^{ℓ} défini par (1.1 a). Les v^i sont les solutions de (1.1 c).

Théorème 1

Le problème 1 admet au moins une solution dans $h^1(-\frac{1}{\Delta\theta})$.

Démonstration : Pour des n_i fixés, les A_i optimaux sont donnés par les relations d'orthogonalité

$$(3.1) \qquad (w,v^{n_i}) = \sum_{i=0}^{N} A_i\ (v^{n_i},v^{n_j}) \qquad j = 0...N$$

(voir (1.2) ; c'est un problème de projection dans un espace de Hilbert).

On en tire

$$(3.2) \quad \begin{cases} A_o + \ldots + A_i = \dfrac{v_{n_i} - v_{n_{i+1}}}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} & i = 0...N-1 \\ A_o + \ldots + A_N = \dfrac{v_{n_N}}{\theta_{n_N}} \end{cases}$$

D'après (3.1) on a

$$\text{(3.2 bis)} \qquad \Big\| w - \sum_{i=0}^{N} A_i \, v^{n_i} \Big\|^2 = \|w\|^2 - \sum_{i=0}^{N} A_i \, (w, v^{n_i})$$

Il suffit donc de montrer que l'on peut rendre

$$M_N = \sum_{i=0}^{N} A_i \, (w, v^{n_i}) \quad \text{maximum.}$$

On applique la transformation d'Abel

$$M_N = \sum_{i=0}^{N} A_i \, w_{n_i}$$

$$= A_o (w_{n_o} - w_{n_1}) + (A_o + A_1)(w_{n_1} - w_{n_2}) + \ldots$$

$$+ (A_o + \ldots + A_{N-1})(w_{n_{N-1}} - w_{n_N}) + (A_o + \ldots + A_N) w_{n_N}$$

Grâce à (3.2), il vient

$$\text{(3.3)} \qquad M_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{-\Delta\theta_{n_i}} + \frac{w_{n_N}^2}{\theta_{n_N}}$$

On cherche donc à maximiser M_N donné par (3.3) sur le domaine

$$\mathcal{D} = \{ n \in \mathbb{N}^{N+1} \;\; n = (n_o, \ldots, n_N) \;\; ; \;\; 0 \leq n_o < n_1 \ldots < n_N \}.$$

Nous définissons

$$\text{(3.4)} \qquad M_N(n_o, \ldots, n_{k-1}, \infty, \ldots, \infty) = \lim_{\substack{n \in \mathcal{D} \\ n_k \to \infty}} M_N(n_o, \ldots, n_{k-1}, n_k, \ldots, n_N)$$

Pour calculer cette limite, nous avons besoin de deux lemmes

Lemme 1

$$\forall w \in h^1\left(-\frac{1}{\Delta\theta}\right) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{w_n^2}{\theta_n} = 0$$

Démonstration : $w \in c_o$ implique $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ donc

$$w_n = - \sum_{p=n}^{\infty} \Delta w_p$$

$$|w_n| \leq \sum_{p=n}^{\infty} \frac{|\Delta w_p|}{\sqrt{-\Delta\theta_p}} \sqrt{-\Delta\theta_p} \leq \left(\sum_{p=n}^{\infty} \frac{(\Delta w_p)^2}{-\Delta\theta_p} \sum_{p=n}^{\infty} -\Delta\theta_p \right)^{1/2}$$

donc

$$\frac{|w_n|^2}{\theta_n} \leq \sum_{p\geq n} \frac{(\Delta w_p)^2}{-\Delta\theta_p}$$

———×———

Lemme 2

$$\forall w \in h^1(-\tfrac{1}{\Delta\theta})$$

$$\frac{(w_n - w_m)^2}{\theta_n - \theta_m} \leq \sum_{p=n}^{m-1} \frac{(w_p - w_{p+1})^2}{\theta_p - \theta_{p+1}} \qquad n < m$$

Démonstration : C'est le même calcul qu'au lemme 1.

$$w_n - w_m = \sum_{p=n}^{m-1} -\Delta w_p$$

$$|w_n - w_m|^2 \leq \sum_{p=n}^{m-1} \frac{(\Delta w_p)^2}{-\Delta\theta_p} \sum_{p=n}^{m-1} -\Delta\theta_p$$

———×———

Calculons maintenant $M_N(n_o,\ldots,n_{k-1},\infty,\ldots,\infty)$ défini par (3.4).
D'après (3.3), on peut écrire

$$M_N = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} + \frac{w^2_{n_{k-1}}}{\theta_{n_{k-1}} - \theta_{n_k}} - \frac{2 w_{n_{k-1}} w_{n_k}}{\theta_{n_{k-1}} - \theta_{n_k}} + \frac{w^2_{n_k}}{\theta_{n_{k-1}} - \theta_{n_k}}$$

$$+ \sum_{i=k}^{N-1} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} + \frac{w^2_{n_N}}{\theta_{n_N}}$$

Quand $n_N \to \infty$ d'après le lemme 1 $\dfrac{w^2_{n_N}}{\theta_{n_N}}$ tend vers 0.

Comme n_k tend vers l'infini, n_i tend vers l'infini pour tout $i \geq k$ et d'après le lemme 2

$$\frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} \leq \sum_{p=n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{(w_p - w_{p+1})^2}{\theta_p - \theta_{p+1}}$$ qui tend vers zéro puisque $w \in h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$

Donc $\sum_{i=k}^{N-1} \dfrac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}}$ tend vers zéro.

Enfin $w \in h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$ implique w_{n_k} tend vers zéro.

D'où

$$(3.5) \quad M_N(n_o,\ldots,n_{k-1},\infty,\ldots,\infty) = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} + \frac{w^2_{n_{k-1}}}{\theta_{n_{k-1}}}$$

où on convient que $\sum_{i=0}^{k-2} = 0$ pour k=1. Enfin pour k=0 on a

$$(3.6) \qquad M_N(\infty,\ldots,\infty) = 0.$$

Déduisons tout de suite de (3.5) une relation utile pour la suite :

$$M_N(n_o,\ldots,n_{k-1},n_k,\ldots,n_N) - M_N(n_o,\ldots,n_{k-1},\infty,\ldots,\infty)$$

$$= \sum_{i=k}^{N-1} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} + \frac{w^2_{n_N}}{\theta_{n_N}} + \frac{(w_{n_{k-1}} - w_{n_k})^2}{\theta_{n_{k-1}} - \theta_{n_k}} - \frac{w^2_{n_{k-1}}}{\theta_{n_{k-1}}}$$

$$= \sum_{i=k}^{N-1} \frac{(w_{n_i} - w_{n_{i+1}})^2}{\theta_{n_i} - \theta_{n_{i+1}}} + \frac{w^2_{n_N}}{\theta_{n_N}} + \frac{(\theta_{n_k} w_{n_{k-1}} - \theta_{n_{k-1}} w_{n_k})^2}{(\theta_{n_{k-1}} - \theta_{n_k})\,\theta_{n_{k-1}}\,\theta_{n_k}} - \frac{w^2_{n_k}}{\theta_{n_k}}$$

et en répétant cette transformation on obtient :

$$(3.6) \quad M_N(n_o,\ldots,n_N) - M_N(n_o,\ldots,n_{k-1},\infty,\ldots,\infty) = \sum_{i=k}^{N} \frac{(\theta_{n_i} w_{n_{i-1}} - \theta_{n_{i-1}} w_{n_i})^2}{\theta_{n_i}\,\theta_{n_{i-1}}\,(\theta_{n_{i-1}} - \theta_{n_i})}$$

On peut chercher le maximum de M_N non pas dans $\mathcal{D}$ mais dans une partie bornée de $\mathcal{D}$ que nous allons construire. Pour cela, supposons d'abord que W n'est pas combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctionnelles ponctuelles.

Choisissons n^o tel que $\varepsilon_o = M_N(n_o^o, n_1^o, n_2^o, \ldots, n_N^o) > 0$. Il existe d'après (3.6) $p_o = p_o(\varepsilon)$ (que l'on peut supposer $> n_o^o$) tel que

$\forall n \in \mathcal{D}$ et $n > p_o$ $\quad M_N(n_o, n_1, \ldots, n_N) \leq \varepsilon_o$

On peut donc se ramener à chercher le sup de M_N pour $n_o \leq p_o$

Soit alors $n_o \in \{0,1,\ldots,p_o\}$ et $\varepsilon_1 > 0$; d'après (3.4) et (3.6) il existe $p_1(\varepsilon_o, \varepsilon_1, n_o)$ tel que $n \in \mathcal{D}$ et $n_1 > p_1$ implique

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{(\theta_{n_i} w_{n_{i-1}} - \theta_{n_{i-1}} w_{n_i})^2}{\theta_{n_i} \theta_{n_{i-1}} (\theta_{n_{i-1}} - \theta_{n_i})} = M_N(n_o, \ldots, n_N) - M_N(n_o, \infty, \ldots, \infty) < \varepsilon_1$$

n_o étant fixé, on peut alors choisir $\overline{n_1}$ tel que la somme du premier membre de (3.7) soit non nulle. Sinon on aurait

$\frac{w_n}{\theta_n} = \frac{w_{n_o}}{\theta_{n_o}}$ $\forall n > n_o$ donc $w_n = \lambda \theta_n$ $\forall n > n_o$ et d'après la caractérisation des fonctionnelles ponctuelles sur $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$ donnée au Chapitre 2 § 2 Proposition 2 w serait combinaison linéaire finie de fonctionnelles ponctuelles.

Pour ce $\overline{n}_1$ et ce n_o et des $\overline{n}_i$ $i \geq 2$ fixés arbitrairement $M_N(n_o, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N) - M(n_o, \infty, \ldots, \infty) > 0$. Prenant pour ε_1 cette quantité, on tire de (3.7) $\forall n \in \mathcal{D}$ et $n_1 > p_1(n_o)$

$$M_N(n_o, \ldots, n_N) < M_N(n_o, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N)$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de valeur de p_o à considérer on voit que l'on peut se ramener à chercher le sup de M_N pour $n_1 \leq p_1 = \sup\{p_1(n_o); n_o = 0 \ldots p_o\}$.

On recommence alors l'opération. Soit $n_1 \in \{0,1,\ldots,p_1^-\}$ etc ...

Reste à examiner le cas où w est combinaison linéaire finie de fonctionnelles ponctuelles. Dans ce cas d'après (3.6)

$$(3.8) \quad M_N(n_o,n_1,\ldots,n_N) = M_N(n_o,\infty,\ldots,\infty) \qquad \forall n \in \mathcal{D},\ n_o > \tilde{n}$$

où l'on désigne par $\tilde{n}$ le plus petit entier tel que

$$\frac{w_n}{\theta_n} = \lambda \qquad \forall n > \tilde{n}$$

En particulier, (3.8) implique

$$M_N(n_o,n_1,\ldots,n_N) = M_N(\tilde{n}+1,\tilde{n}+2,\ldots) \qquad \forall n \in \mathcal{D},\ n_o > \tilde{n}$$

On peut donc se limiter, pour la recherche du maximum à $n_o \leq \tilde{n}$. On recommence la même opération avec n_1. Si $n_1 > \tilde{n}$ alors $M_N(n_o,n_1,\ldots,n_N) = M_N(n_o,\tilde{n}+1,\tilde{n}+2 \ldots) \quad \forall n \in \mathcal{D}$. On peut donc se limiter au domaine $n_1 \leq \tilde{n}$. etc....

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.

———×———

Remarque

Ce résultat d'existence d'une formule optimale pour toute fonctionnelle a été démontré aussi depuis pour les espaces h^1 de fonctions continues (cf DUC-JACQUET [6]).

§ 4 - CONSTRUCTION D'UNE FORMULE OPTIMALE DE SOMMATION D'UNE SERIE DANS h_a

Un cas particulier d'espace $h^1(\frac{-1}{\Delta\theta})$ est l'espace h_a^1 introduit au Chapitre 2 § 1 3). Nous noterons toujours $h_a^1 = h_a$

$$h_a = \{u=(u_n) \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} (\Delta u_n)^2 < \infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$$

où $0 < a < 1$.

Dans ce cadre, la solution du problème 1 est donnée par la

Proposition 6

Pour le choix d'indices $n_i = i$, les meilleurs A_i sont :

$$A_o = A_1 = \ldots = A_{N-1} = 1$$

$$A_N = \frac{1}{1-a}$$

La norme de la fonctionnelle erreur est alors :

$$e = \left(\frac{a^{N+1}}{(1-a)^3} \right)^{1/2}$$

Démonstration : On cherche v^n vérifiant (1.1 c)

c'est-à-dire

$$(4.1) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i} \Delta u_i \, \Delta v_i^n = u_n \qquad \forall u \in h_a$$

De la relation

$$\Delta x_i \, y_i = x_{i+1} \, \Delta y_i + y_i \Delta x_i$$

on tire

$$(4.2)\qquad \sum_{i=0}^{N} \Delta u_i \frac{1}{a^i} \Delta v_i^n = u_{N+1} \frac{1}{a^{N+1}} \Delta v_{N+1}^n - u_o \Delta v_o^n + \sum_{i=0}^{N} u_{i+1} \Delta\left(\frac{1}{a^i} \Delta v_i^n\right)$$

Faisant $u = e_i = (0\ldots0,1,0\ldots)$ dans (4.1) et utilisant (4.2), on a les conditions nécessaires (pour $n \geq 1$)

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \Delta v_o^n = 0 \\ \Delta\left(\frac{1}{a^i} \Delta v_i^n\right) = -\delta_{i+1n} \qquad \forall i \geq 0 \end{cases}$$

et pour $n = 0$

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \Delta v_o^o = -1 \\ \Delta\left(\frac{1}{a^i}\right) \Delta v_i^n) = 0 \qquad \forall i \geq 0 \end{cases}$$

Résolvons par exemple (4.3)

$$\begin{cases} \Delta v_i^n = 0 & i \leq n-1 \\ \Delta v_i^n = -a^i & i > n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_i^n = v_o^n & i \leq n \\ v_i^n = \sum_{p=n}^{i-1} \Delta v_p^n + v_n^n = -\sum_{p=n}^{i-1} a^p + v_o^n & i > n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_i^n = v_o^n & i \leq n \\ v_i^n = v_o^n - \frac{a^i - a^n}{a-1} & i > n \end{cases}$$

$v^n \in H_a$ impose $v_o^n = \frac{a^n}{1-a}$; donc

$$(4.5)\qquad \begin{cases} v_i^n = \dfrac{a^n}{1-a} & i \leq n \\ v_i^n = \dfrac{a^i}{1-a} & i > n \end{cases}$$

En résolvant (4.4) on vérifie facilement que (4.5) reste valable pour $n = 0$.

v^n défini par (4.5) est tel que $\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{(\Delta v_i^n)^2}{a^i} < \infty$

et

$$(4.6)\qquad \lim_{i\to\infty} u_i \frac{1}{a^i} \Delta v_i^n = -\lim_{i\to\infty} u_i = 0 \qquad \forall u \in h_a$$

alors de (4.2) on déduit que v^n vérifie (1.1 c).

Pour déterminer v solution de (1.1 b), on peut soit faire un calcul direct analogue au précédent soit écrire

$$v_k = \sum_{n=0}^{\infty} v_k^n$$

$$v_k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a^k}{1-a} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n}{1-a}$$

$$= \frac{ka^k}{1-a} + \frac{a^k}{(1-a)^2}$$

La solution v de (1.1 b) est donc donnée par

$$(4.7)\qquad v_k = \frac{(k+1)a^k - ka^{k+1}}{(1-a)^2}$$

Le système (1.2) donnant les A_i optimaux pour des n_i fixés s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} a^{n_o} & a^{n_1} & \dots & a^{n_N} \\ a^{n_1} & a^{n_1} & \dots & a^{n_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n_N} & a^{n_N} & \dots & a^{n_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_o \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} n_o a^{n_o}(1-a) + a^{n_o} \\ \vdots \\ n_N a^{n_N}(1-a) + a^{n_N} \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne alors

$$(4.8)\qquad \begin{cases} A_o = \dfrac{n_o a^{n_o} - n_1 a^{n_1}}{a^{n_o} - a^{n_1}} + \dfrac{1}{1-a} \\ A_1 = \dfrac{n_1 a^{n_1} - n_2 a^{n_2}}{a^{n_1} - a^{n_2}} - \dfrac{n_o a^{n_o} - n_1 a^{n_1}}{a^{n_o} - a^{n_1}} \\ \cdots \\ A_{N-1} = \dfrac{n_{N-1} a^{n_N} - n_N a^{n_N}}{a^{n_{N-1}} - a^{n_N}} - \dfrac{n_{N-2} a^{n_{N-2}} - n_{N-1} a^{n_{N-1}}}{a^{n_{N-2}} - a^{n_{N-1}}} \\ A_N = n_N - \dfrac{n_{N-1} a^{n_{N-1}} - n_N a^{n_N}}{a^{n_{N-1}} a^{n_N}} \end{cases}$$

En particulier pour $n_i = i$

$$\frac{n_i a^{n_i} - n_{i+1} a^{n_{i+1}}}{a^{n_i} - a^{n_{i+1}}} = \frac{i a^i (1-a) - a^{i+1}}{a^i (1-a)} = i - \frac{a}{1-a}$$

ce qui donne $A_o = \ldots = A_{N-1} = 1$, $A_N = \frac{1}{1-a}$ et démontre la première partie de la proposition.

Calcul de l'erreur. On a d'après (3.2 bis)

$$(4.9)\qquad e^2 = \|v\|^2 - M_N \quad \text{avec}$$

$$(4.10)\qquad M_N = \sum_{i=0}^{N} A_i (v, v^{n_i})$$

Comme v est solution de

$$\begin{cases} \Delta v_o = -1 \\ \Delta\left(\dfrac{1}{a^i} \Delta v_i\right) = -1 \qquad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\Delta v_i = -(i+1) a^i \qquad \forall i \geq 1$$

On a

$$(v,v) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{a^i} \Delta^2 v_i = \sum_{0}^{\infty} (i+1)^2 a^i$$

D'où :

$$(4.11) \qquad (v,v) = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

Nous obtiendrons (formule (4.14)) dans la démonstration de la proposition suivante la relation

$$(4.12) \qquad M_N = \frac{1}{1-a} \left[a^{n_o} \left(n_o + \frac{1}{1-a}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} a^{n_i} \frac{(n_{i+1}-n_i)^2}{a^{-(n_{i+1}-n_i)}-1} \right]$$

Faisant $n_i = i$, on tire

$$M_N = \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{(1-a)^2} + \sum_{i=0}^{N-1} a^i \frac{1}{a^{-1}-1} \right] = \frac{1}{(1-a)^3} \left[1 + (1-a^N)a\right]$$

D'où d'après (4.9) et (4.11)

$$e^2 = \frac{a^{N+1}}{(1-a)^3}$$

———X———

Remarque 7 - Le résultat de la proposition 6 est "élémentaire" mais il est assez curieux. BREZINSKI ([20] p15) en a donné une interprétation le reliant au Δ^2 d'AITKEN qui lui a permis plus généralement d'interpréter tous les procédés totaux de sommation comme des extrapolations par des sommes d'exponentielles. Voici un résumé de cette interprétation :

Soit u_n une série convergente $s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ et considérons

$$(4.13) \qquad v_n = \sum_{i=0}^{n} A_i u_i = s_{n-1} + \frac{1}{1-a} \Delta s_n$$ le transformé de u défini par la méthode de la proposition 6. On cherche à obtenir une accélération (au sens de BREZINSKI) i.e que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1} - v_n}{s_{n+1} - s_n} = 0$$

Un calcul simple donne

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{s_{n+1} - s_n} = \frac{1}{1-a} - \frac{a}{1-a} \frac{\Delta s_{n-1}}{\Delta s_n}$$

Une condition d'accélération est donc $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$

Si on remplace maintenant dans (4.13) a par sa valeur approchée $\frac{\Delta s_n}{\Delta s_{n-1}}$ on obtient $v_n = \frac{s_{n-1}\, s_{n+1} - s_n^2}{\Delta^2 s_{n-1}}$ qui est le procédé Δ^2 d'AITKEN.

Voici maintenant une solution constructive du problème 2 pour l'espace h_a.

Théorème 2

Dans l'espace h_a, il existe au moins une formule optimale de sommation.

Les n_i sont ceux qui rendent maximum

$$M_N = \frac{1}{1-a} \left[a^{n_o} (n_o + \frac{1}{1-a})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(n_{i+1} - n_i)^2}{a^{-(n_{i+1}-n_i)} - 1} \right]$$

Les A_i sont alors déterminés de manière unique par le système (4.8) p. 17.

Démonstration : D'après (4.9) pour que e soit minimum, il faut et il suffi- que $M_N = \sum_{i=0}^{N} A_i (v, v^{n_i})$ soit maximum. On transforme donc cette quantité

$$M_N = \sum_{i=0}^{N} A_i v_{n_i} = \frac{1}{1-a} v_{n_o} + \frac{n_o a^{n_o} - n_1 a^{n_1}}{a^{n_o} - a^{n_1}} (v_{n_o} - v_{n_1}) + \ldots$$

$$+ \frac{n_{N-1} a^{n_{N-1}} - n_N a^{n_N}}{a^{n_{N-1}} - a^{n_N}} (v_{n_{N-1}} - v_{n_N}) + n_N v_{n_N}$$

Comme
$$v^{n_i} = \frac{a^{n_i}}{(1-a)^2}\ [n_i(1-a)+1]$$

$$v^{n_i} - v^{n_{i+1}} = \frac{1}{(1-a)^2}\ [(n_i a^{n_i} - n_{i+1} a^{n_{i+1}})\ (1-a) + a^{n_i} - a^{n_{i+1}}]$$

$$M_N = \frac{1}{(1-a)^2}\ \{a^{n_o}(n_o + \sum_{i=0}^{N-1} [\frac{(n_i a^{n_i} - n_{i+1} a^{n_{i+1}})^2}{a^{n_i} - a^{n_{i+1}}}\ (1-a)$$

$$+ n_i a^{n_i} - n_{i+1} a^{n_{i+1}}] + n_N a^{n_N} + n_N^2 a^{n_N}(1-a)\}$$

En remarquant que

$$\frac{(n_i a^{n_i} - n_{i+1} a^{n_{i+1}})^2}{a^{n_i} - a^{n_{i+1}}} = (n_i - n_{i+1})^2\ \frac{a^{n_i + n_{i+1}}}{a^{n_i} - a^{n_{i+1}}} + n_i^2 a^{n_i} - n_{i+1}^2 a^{n_{i+1}}$$

$$M_N = \frac{1}{(1-a)^2}\ \{a^{n_o}(2n_o + \frac{1}{1-a}) + (1-a) \sum_{i=0}^{N-1}$$

$$[(n_i - n_{i+1})^2\ \frac{a^{n_i + n_{i+1}}}{a^{n_i} - a^{n_{i+1}}} + n_i^2 a^{n_i} - n_{i+1}^2 a^{n_{i+1}}] + n_N^2\ a^{n_N}(1-a)\}$$

Finalement

$$(4.14) \qquad M_N = \frac{1}{1-a}\ [a^{n_o}(n_o + \frac{1}{1-a})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} a^{n_i}\ \frac{(n_{i+1} - n_i)^2}{a^{-(n_{i+1} - n_i)} - 1}\ ]$$

Posons

$$x_o = n_o$$

$$x_i = n_i - n_{i-1} \qquad i \geq 1$$

Soit
$$\phi(u) = \frac{u^2}{a^{-u} - 1}$$

alors

$$(1-a)M_N = a^{x_o}[(x_o + \frac{1}{1-a})^2 + \phi(x_1) + a^{x_1 + x_2}\phi(x_3) + \ldots$$

$$+ a^{x_1 + \ldots + x_{N-2}}\ \phi(x_{N-1}) + a^{x_1 + \ldots + x_{N-1}}\phi(x_N)]$$

(4.15) $$(1-a)M_N = a^{x_o}\left(x_o + \frac{1}{1-a}\right)^2 +$$

$$a^{x_o}[\phi(x_1) + a^{x_1}[\phi(x_2) + \ldots + a^{x_{N-2}}[\phi(x_{N-1}) + a^{x_{N-1}}\phi(x_N)]]] \ldots$$

La recherche d'un maximum se fait alors en utilisant les lemmes :

Lemme 1

$$\phi_k(u) = \phi(u) + a^u k \qquad k \geq 0$$

a au moins un maximum en nombres entiers pour $u \in [1, +\infty[$

Lemme 2

$$\psi_k(u) = a^u\left[\left(u + \frac{1}{1-a}\right)^2 + k\right] \qquad k > 0$$

a au moins un maximum en nombres entiers pour $u \in [0, +\infty[$

Ces lemmes se démontrent en étudiant les dérivées de ϕ_k et ψ_k.

Il est alors clair que M_N a un maximum en nombres entiers. En effet, on applique le lemme 1 avec k=0, ce qui donne x_N maximisant $\phi_o(u$ On pose $\phi(x_N) = k_N$ et on applique à nouveau le lemme 1 à $\phi_{k_N}(u)$, ce qui donne x_{N-1}. On pose $\phi(x_{N-1}) = k_{N-1}$ et on recommence. On détermine ainsi tous les x_i $i \geq 1$. On trouve enfin n_o en appliquant le lemme 2 à $\psi_{k_1}(u)$ où $k_1 = \phi_{k_2}(x_1)$ et $k_i = \phi_{k_{i+1}}(x_i)$ pour $i \geq 2$.

On a alors les n_i par

(4.16) $$x_i = n_i - n_{i-1} \qquad i = 1 \ldots N \quad \text{et} \quad x_o = n_o$$

puis les A_i par (4.8).

———— X ————

§ 5 - QUELQUES EXEMPLES NUMERIQUES

Voici d'abord quelques valeurs des n_i et A_i optimaux du théorème 2 suivant les valeurs de a

N = 1

i	n_i	A_i	n_i	A_i	n_i	A_i	n_i	A_i
0	0	2.428569+00	0	3.333333+00	0	5.402816+00	0	1.611090+01
1	1	6.556510-07	2	6.666669-01	4	1.930516+00	15	8.889093+00
	a = 0.3		a = 0.5		a = 0.7		a = 0.9	

i	n_i	A_i
0	0	3.205981+01
1	31	1.894015+01
	a = 0.95	

N = 5

i	n_i	A_i	n_i	A_i	n_i	A_i
0	0	3.000000+00	0	4.333333+00	0	1.279029+01
1	1	1.000000+00	1	1.411766+00	5	5.404495+00
2	2	1.000000+00	3	1.999997+00	11	6.387627+00
3	3	1.333333+00	5	2.355360+00	18	8.064193+00
4	5	2.000000+00	8	3.302358+00	28	1.146426+01
5	7	6.666669-01	12	1.930517+00	43	8.889129+00
	a = 0.5		a = 0.7		a = 0.9	

On constate sur ces tableaux que les n_i se dispersent d'autant plus que a est proche de 1 et que parallèlement les A_i associés s'accroissent quand a tend vers 1. Il paraît difficile d'interpréter pratiquement cette "dispersion" des indices.

Nous étudions maintenant l'évolution de l'erreur. Dans les tableaux suivants, e' est la norme de l'erreur pour la formule à coefficients optimaux de la proposition 6

$e' = \left(\frac{a^{N+1}}{1-a^3}\right)^{1/2}$ tandis que e est la norme de l'erreur pour la formule optimale du théorème 2.

	a = 0.5					a = 0.7			
N	1	2	5	10	15	1	2	5	10
e'	1.41	1.00	0.34	0.06	0.011	4.25	3.56	2.09	0.86
e	1.15	0.82	0.29	0.05	0.009	3.01	2.12	1.09	0.45

	a = 0.9			a=0.95	a = 0.3
N	1	5	10	1	1
e'	28.5	23.1	5.92	85	1.76
e	17.8	6.82	3.81	52	0.51

On constate sur ces tableaux que conformément à la théorie $e' < e$; mais on voit également que e est toujours du même ordre de grandeur que e'.

C H A P I T R E 4

oOo

REMARQUES DIVERSES

Il contient des résultats donnant quelques idées sur la possibilité d'utiliser les méthodes du Chapitre 3 pour résoudre d'autres problèmes de formules optimales. Au § 1, on constate que la méthode n'est pas bonne pour obtenir des résultats d'accélération de convergence dans c, espace des suites convergentes. Le § 2 contient deux résultats négatifs sur le calcul de fonctionnelles sur $C[\alpha,\beta]$ espace de fonctions continues : comme pour c, la méthode du Chapitre 3 n'est pas bien adaptée au problème. Par contre, le § 3 contient, lui, un résultat positif sur l'existence de formules optimales de calcul de $\int_\alpha^\infty f(t)dt$ sur un sous espace hilbertien de $L^1[\alpha,\infty[$.

oOo

PLAN DU CHAPITRE 4

§ 1 - Accélérateurs de convergence de suite. p. 1

§ 2 - Calcul de fonctionnelles optimales sur $C[\alpha,\beta]$. p. 3

1. Utilisation des résultats du Chapitre 3 p. 3
2. Un deuxième résultat négatif. p. 5

§ 3 - Une formule optimale pour le calcul d'une intégrale sur un intervalle infini. p. 8

§ 1 - ACCELERATEURS DE CONVERGENCE DE SUITE

Considérons l'application naturelle de ℓ_1 dans c, ensemble des suites convergentes de nombres réels, définie par

$$(1.1) \qquad \omega(u) = v \text{ avec } \begin{cases} v_o = 0 \\ v_n = u_o + \ldots + u_{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

On note bv l'espace de Banach des suites de réels à variation bornée normé par $\|v\|_{bv} = |v_o| + \sum_{i=0}^{\infty} |\Delta v_i|$. On a $bv \subset c$ et l'injection canonique est continue. Notons $b\tilde{v} = \{v \in bv \ ; \ v_o = 0\}$. Alors ω est une isométrie bijective de ℓ_1 sur $b\tilde{v}$.

On dispose ainsi (cf [16]) d'un moyen pour faire passer certains résultats de (ℓ_1) dans (c). Par exemple le théorème 1 du Chapitre 2 donne :

Proposition 1

$$h_c^p(\phi) = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \Delta v \in c_o \ , \ \sum_n \phi_n (\Delta^p v_n)^2 < \infty\} \text{ (avec } p \geq 1)$$

est un sous espace hilbertien de c ssi $\sum_n \frac{n^{2(p-1)}}{\phi_n} < \infty$

Les fonctionnelles $u \to \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ et $u \to u_i$ (i fixé) sur ℓ_1 correspondent respectivement aux fonctionnelles $v \to \lim_{n\to\infty} v_n$ et $v \to \Delta v_i$ (i fixé) sur $b\tilde{v}$.

Le sous espace h_a du Chapitre 3 ($0 < a < 1$) a pour correspondant le sous espace $h_{a,c} = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \Delta v \in c_o, \ \sum_n a^{-n} (\Delta^2 v_n)^2 < \infty\}$.

Ce sous espace est un **sous** espace hilbertien de c (Proposition 1) pour le produit scalaire

$$(v,w)_a = (\sum_n a^{-n} \Delta^2 v_n \Delta^2 w_n)^{1/2}$$

Une formule optimale pour le calcul de la limite dans $h_{a,c}$ est une formule telle que la norme de la fonctionnelle

$$(1.2) \qquad v \to \lim_n v_n - \sum_{i=0}^{N} A_i \Delta v_{n_i}$$

soit minimum. L'équivalent de la proposition 6 Chapitre 3 est ici

Proposition 2

Pour $n_i = i$ la formule optimale est

$\lim_{n\to\infty} v_n$ calculée par $- \frac{a v_N}{1-a} + \frac{v_{N+1}}{1-a}$

avec une erreur $e = \frac{a^{(N+1)/2}}{(1-a)^{3/2}}$

———X———

On pourrait écrire pour $h_c^2(\phi)$ l'analogue du théorème 1 Chapitre 3 (ainsi d'ailleurs que pour $h_c^1(\phi)$ l'analogue de la Proposition 4 Chapitre 3). Contentons-nous de traduire ici le théorème 2 Chapitre 3.

Théorème

Il existe dans $h_{a,c}$ une formule optimale (1.2) pour le calcul de la limite.

———X———

On constate ainsi que le problème résolu n'est pas "le bon problème" dans c. Celui-ci pourrait être miniser la norme de la fonctionnel

$$v \to \lim_{n\to\infty} v_n - \sum_{i=0}^{N} B_i v_{n_i}$$

Ce problème prend dans h_a la forme : minimiser la norme de la fonctionnelle

$$u \to \sum_{i=0}^{\infty} u_n - \sum_{i=0}^{N} A_i (u_{n_{i-1}} + \ldots + u_{n_i - 1})$$

(avec la convention $n_{-1} = 0$) et c'est un problème que je n'ai pas su résoudre.

§ 2 - CALCUL OPTIMAL DE FONCTIONNELLES SUR $C[\alpha,\beta]$

1. Utilisation des résultats du Chapitre 3

C'est un problème posé depuis lontemps par A. SARD [21]. Renvoyons à nouveau à M. DUC-JACQUET [6]. Je me borne à examiner ici ce que donne les méthodes du Chapitre 3. $C[\alpha,\beta] = C$ est l'espace des fonctions réelles continues sur $[\alpha,\beta]$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [\alpha,\beta]} |f(x)|$$

Définissons

$$\Gamma_a = \{f \in C \; ; \; f = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \, f_i \text{ avec } \omega = (\omega_i) \in h_a\}$$

où $f_i \in C$ et

$$\|f_i\|_\infty \leq M \qquad \forall i$$

Γ_a est muni du produit scalaire défini par

Si $f = \Sigma \, \omega_i \, f_i \qquad g = \Sigma \, \mu_i \, g_i \qquad \omega = (\omega_i) \qquad \mu = (\mu_i)$

(2.1) $$(f,g)_{\Gamma_a} = (\omega,\mu)_{h_a}$$

Alors

$$\|f\|_\infty \leq M \, \Sigma |\omega_i| \leq M \, \|\omega\|_{h_a} = M \, \|f\|_{\Gamma_a}$$

(l'inégalité du centre traduit que l'injection canonique de h_a dans ℓ_1 est continue).

Donc Γ_a est un sous-espace hilbertien de C.

Remarquons que la norme sur Γ_a définie par (2.1) ne dépend pas de la famille f_i mais les noyaux reproduisants des fonctionnelles définies sur Γ_a en dépendront.

On peut interpréter le problème résolu dans h_a de diverses manières ; cela dépend du choix des f_i.

Par exemple pour $f_i(x) = x^i$ sur [0,1] on a résolu le problème

(2.2) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$f \to f(1) - \sum_{i=0}^{N} A_i \omega_i$$

(avec $f = \sum_{0}^{\infty} \omega_i x^i$)

C'est donc un problème d'interpolation dans un espace de fonctions analytiques.

On constate là encore que le problème (2.2) n'est pas non plus "naturel" dans Γ_a. Un problème "naturel" est le suivant :

(2.3) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$f \to \int_0^1 f(t)dt - \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$$

(problème d'intégration approchée).

Un autre encore est :

(2.4) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$f \to f(\theta) - \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i) \qquad \theta \text{ fixé}$$

(problème d'interpolation)

Ces problèmes deviennent dans h_a

(2.5) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$u \to \sum_{i=0}^{\infty} u_i \int_0^1 f_i(t)dt - \sum_{i=0}^{N} A_i \sum_{k=0}^{\infty} u_k f_k(x_i)$$

et respectivement

(2.6) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$u \to \sum_{i=0}^{\infty} u_i f_i(\theta) - \sum_{i=0}^{N} A_i \sum_{k=0}^{\infty} u_k f_k(x_i)$$

Les problèmes (2.5) et (2.6) sont un cas particulier de

(2.7) rendre minimum la norme de la fonctionnelle

$$u \to \sum_{i=0} \lambda_i u_i - \sum_{i=0}^{N} A_i \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^j u_j$$

D'où la nécessité de disposer d'une représentation explicite et maniable dans h_a de la fonctionnelle.

(2.8) $$u \to \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_i \qquad \lambda = (\lambda_i) \text{ donné}$$

Je n'ai pas obtenu de résultats intéressants dans cette voie.

2. Un deuxième résultat négatif

Voici une autre tentative pour obtenir à partir de résultats dans des espaces de suites un résultat dans C. Là également, le résultat obtenu (proposition 3) semble indiquer que cette voie est peu intéressante.

Soient g une fonctionnelle linéaire sur C et g_n une suite de fonctionnelles linéaires continues convergeant faiblement vers g (g est alors continue d'après le théorème de Banach-Steinhauss). On définit une application $\mathcal{J}$ de C dans c par

$$\mathcal{J}(f) = (\langle g_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

où $\langle , \rangle$ désigne la dualité C',C.

Considérons un sous espace hilbertien séparable H de C et désignons par $\tilde{g}_n$ et $\tilde{g}$ les représentants respectifs dans H des formes linéaires continues sur H g_n et g. On peut chercher une approximation optimale de g en réalisant :

(2.9) $\inf \| \tilde{g} - \sum_{i=0}^{N} A_i \tilde{g}_{n_i} \|_H$ pour des A_i quelconques et des n_i tels que $0 \leq n_o \ldots < n_i < n_{i+1} \cdots \; 0 \leq i \leq N-1$.

Si l'on suppose $\mathcal{J}$ continue, on peut considérer le sous espace hilbertien h, image par $\mathcal{J}$ du sous espace hilbertien H (cf L. SCHWARTZ [12]).

Si l'on désigne par ℓ et ℓ_n les représentants dans h des fonctionnelles linéaires continues sur c $u \to \lim_{n\to\infty} u_n$ et $u \to u_n$, on peut chercher une approximation optimale de ℓ en réalisant

(2.10) $\inf \| \ell - \sum_{i=0}^{N} B_i \ell_{n_i} \|_h$ pour des B_i quelconques et des n_i tels que $0 \leq n_o \ldots < n_i < n_{i+1} \quad 0 \leq i \leq N-1$.

Proposition 3

On a

$$\| \ell - \sum_{i=0}^{N} B_i \ell_{n_i} \|_h = \| \tilde{g} - \sum_{i=0}^{N} B_i \tilde{g}_{n_i} \|_H$$

Remarque - Si on est parti d'une formule optimale pour $\tilde{g}$, on obtient une formule optimale pour ℓ et réciproquement. On ne peut donc rien améliorer au point de vue calcul par cette opération.

———X———

Démonstration de la proposition 3 : Soit $(h_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne dénombrable de H. Tout $f \in H$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{i \in I} c_i h_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in I} c_i^2 < \infty$$

H est somme directe de Ker $\mathcal{J} \cap H = A_1$ et de son orthogonal A_2. On peut supposer la base $(h_i)_{i \in I}$ choisie de telle manière qu'il existe une partition (I_1, I_2) de I telle que $(h_i)_{i \in I_1}$ soit une base de A_1 et $(h_i)_{i \in I_2}$ soit une base de A_2. D'après la construction de SCHWARTZ, on a $h = \mathcal{J}(H)$ et h est muni de la structure transportée de celle de A_2 par l bijection quotient $\dot{\mathcal{J}}$ de A_2 sur $\mathcal{J}(H) = h$. Ici

$$h = \{u,\ u = (\sum_{i \in I_2} c_i \ \langle \tilde{g}_n, h_i \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \sum_{i \in I_2} c_i^2 < \infty\}$$

et le produit scalaire est

$$(2.11) \qquad (u,v)_h = (f,f')_H = \sum_{i \in I_2} c_i\, c_i' \quad \text{avec}$$

$$u = \mathcal{J}(f),\ v = \mathcal{J}(g),\ f = \sum_{i \in I_2} c_i\, h_i,\ g = \sum_{i \in I_2} c_i'\, h_i$$

Cherchons ℓ telle que $\ell = (\sum_{i \in I_2} \ell_i \ \langle \tilde{g}_n, h_i \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$(2.12) \qquad (\ell,u)_h = \lim_n u_n \qquad \forall u \in h$$

$$\sum_{i \in I_2} c_i\, \ell_i = \lim_n \sum_{i \in I_2} c_i \langle \tilde{g}_n, h_i \rangle = \lim_n \langle \tilde{g}_n, f \rangle = \langle \tilde{g}, f \rangle = \sum c_i \langle \tilde{g}, h_i \rangle$$

$\forall c$ tel que $\sum_{i \in I_2} c_i^2 < \infty$

donc $\ell_i = \langle \tilde{g}, h_i \rangle$ et $\ell = (\sum_{i \in I_2} \langle \tilde{g}_n, h_i \rangle \langle \tilde{g}, h_i \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

De la même manière, on calcule ℓ_n tel que

$$(\ell_k, u)_h = u_k \qquad \forall u \in h$$

On obtient

$$\ell_k = (\sum_{i \in I_2} \langle \tilde{g}_n, h_i \rangle \langle \tilde{g}_k, h_i \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

Alors d'après (2.11)

$$\| \ell - \sum_{i=0}^{N} B_i\, \ell_{n_i} \|_h^2 = \sum_{i \in I_2} \langle \tilde{g} - \sum_{j=0}^{N} B_j\, \tilde{g}_{n_j}, h_i \rangle^2$$

comme d'après le choix de la base on a $\langle \tilde{g}_n, h_l \rangle = 0 \quad \forall i \in I_1$ et donc $\langle \tilde{g}, h_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I_1$ on a aussi

$$\| \ell - \sum_{i=0}^{N} B_i \ell_{n_i} \|_h^2 = \sum_{i \in \ell} \langle \tilde{g} - \sum_{j=0}^{N} B_j \tilde{g}_{n_j}, h_i \rangle^2 = \| \tilde{g} - \sum_{j=0}^{N} B_j \tilde{g}_{n_j} \|_H^2$$

———— x ————

§ 3 - UNE FORMULE OPTIMALE POUR LE CALCUL D'UNE INTEGRALE SUR UN INTERVALLE INFINI

Soit $\phi : [\alpha, \infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \phi > 0$

ϕ continue.

On pose, en désignant par f' la dérivée distribution de f,

$$H^1(\phi) = \{ f \in C\,[\alpha,\infty[,\ \sqrt{\phi}\, f' \in L^2\,[\alpha,\infty[,\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \}$$

Proposition 1

$H^1(\phi)$ est un sous espace hilbertien de $L^1[\alpha,\infty[$ ssi la fonction

$\psi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\phi(x)}}$ est telle que $\phi \in L^2[\alpha,\infty[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\phi}} \in L^2[\alpha,\infty[$

($H^1(\phi)$ est muni du produit scalaire $\displaystyle\int_\alpha^\infty \phi(t)\, f'(t)\, g'(t)\, dt$)

Démonstration : Soit $f \in H^1(\phi)$. On définit l'application $f \in H^1(\phi) \to \sqrt{\phi}\, f' \in L^2[\alpha,\infty[$. Cette application est une isométrie bijective. La seule chose non évidente est la surjectivité. Soit $v \in L^2[\alpha,\infty[$ et $t \geq \alpha$

$$\int_t^\infty \frac{|v(x)|}{\phi(x)}\, dx \leq \left[\int_t^\infty \frac{1}{\phi(x)}\, dx \int_\alpha^\infty |v(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

En particulier $\frac{v}{\sqrt{\phi}} \in L^1$. Posons $f(x) = \int_x^\infty \frac{-v(t)}{\phi(t)}\,dt$. Alors $f' \in L^2$ et

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; et la surjectivité est démontrée.

De plus

$$\int_\alpha^X |f(x)|\,dx = X|f(X)| - \alpha|f(\alpha)| - \int_\alpha^X x|f|'(x)\,dx$$

Comme

$$x|f(x)| \le \int_x^\infty \frac{t|v(t)|}{\sqrt{\phi(t)}}\,dt \to 0$$

On a $|f'| = ||f|'|$; d'où

$$\int_\alpha^\infty |f(x)|\,dx \le 2 \left(\int_\alpha^\infty \frac{x^2}{\phi(x)}\,dx \int_\alpha^\infty \phi(x)|f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

i.e $$\|f\|_{L^1(\alpha,\infty)} \le 2 \left(\int_\alpha^\infty \frac{x^2}{\phi(x)}\,dx\right)^{1/2} \|f\|_{H^1(\phi)}$$

Réciproquement si $\|f\|_{L^1(\alpha,\infty)} \le K \|f\|_{H^1(\phi)}$ $\forall f \in H^1(\phi)$

les fonctionnelles

(3.0) $f \to f(x)$ (x fixé) et

(3.1) $f \to \int_\alpha^\infty f(x)dx$ sont continues sur $H^1(\phi)$

et il existe $g \in H^1(\phi)$ et $g_x \in H^1(\phi)$ telles que

$$(f,g)_{H^1(\phi)} = \int_\alpha^\infty f(x)dx \quad \forall f \in H^1(\phi) \quad \text{et}$$

$$(f,g_x)_{H^1(\phi)} = f(x) \quad \forall f \in H^1(\phi)$$

On en déduit facilement que le représentant de la fonctionnelle (3.0) est donné par les formules (3.3) ci-dessous (pour $x = x_1$) et qu'en particulier

(3.1') $g_\alpha(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\phi(t)}$ et

que le représentant de la fonctionnelle (3.1) est donné par

(3.2) $g(x) = + \int_x^\infty \frac{t-\alpha}{\phi(t)}\,dt$

Comme $g \in H^1(\phi)$ on a d'après (3.2)

$$+\infty > \int_\alpha^\infty \phi\, g'^2 = \int_\alpha^\infty \frac{(x-\alpha)^2}{\phi(x)} \sim \int_\alpha^\infty \frac{x^2}{\phi(x)} \quad \text{et } \psi \in L^2[\alpha,\infty[$$

De même $g^\alpha \in H^1(\phi)$ implique d'après (3.1') $\frac{1}{\sqrt{\phi}} \in L^2[\alpha,\infty[$

———X———

Nous énonçons ci-dessous une proposition utile pour la suite et démontrée au cours de la démonstration précédente.

Proposition 2

Soit $g^I \in H^1(\phi)$ telle que

$$(g^I, f)_{H^1(\phi)} = f(x_I) \qquad \forall f \in H^1(\phi)$$

On a

$$(3.3) \qquad g^I(x) = \begin{cases} +\int_x^\infty \frac{dt}{\phi(t)} & x \geq x_I \\ +\int_{x_I}^\infty \frac{dt}{\phi(t)} & x \leq x_I \end{cases}$$

———X———

Recherche d'une formule optimale

N étant fixé, on cherche à résoudre le problème d'existence d'une formule optimale de calcul de l'intégrale $\int_\alpha^\infty$; i.e on cherche les A_I et les x_I réalisant

$$(3.4) \quad \inf \left\{ \left\| g - \sum_{I=0}^{N} A_I\, g^I \right\|_{H^1(\phi)},\ (A_0,\ldots,A_N) \quad R^{N+1},\ \alpha \leq x_0 < \ldots x_I < x_{I+1} \cdots \right.$$
$$I = 0 \ldots N-1$$

Les A_I sont reliés aux g_I par les relations d'orthogonalité :

$$(3.5) \quad \sum_{I=0}^{N} A_I (g^I, g^J)_{H^1(\phi)} = (g, g^J)_{H^1(\phi)}$$

Il résulte des propositions 1 et 2 que l'on a

$$(g^i,g^j)_{H^1(\phi)} = \int_{x_j}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} \qquad \text{si } x_j \geq x_i$$

$$(g,g^j)_{H^1(\phi)} = \int_{x_j}^{\infty} \frac{t-\alpha}{\phi(t)}\, dt$$

ce qui permet d'écrire (3.5) sous la forme :

$$(3.6)\quad \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} & \int_{x_1}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} & \cdots & \int_{x_N}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} \\ \int_{x_1}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} & \int_{x_1}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} & & \vdots \\ \int_{x_N}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} & \cdots & & \int_{x_N}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{\infty} \frac{-\alpha+t}{\phi(t)}\, dt \\ \\ \int_{x_N}^{\infty} \frac{-\alpha+t}{\phi(t)}\, dt \end{pmatrix}$$

On en déduit comme au Chapitre 3 qu'il est équivalent de résoudre (3.4) ou

$$(3.7)\quad \sup_{\alpha \leq x_0 < \ldots x_i < x_{i+1} \ldots < x_N} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{a-t}{\phi(t)}\, dt \right)^2}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dt}{\phi(t)}} + \frac{\left(\int_{x_N}^{\infty} \frac{a-t}{\phi(t)}\, dt \right)^2}{\int_{x_N}^{\infty} \frac{dt}{\phi(t)}} \right\} = \sup \phi$$

Plutôt que de reprendre ici les considérations théoriques du théorème 1 Chapitre 3, je vais donner un exemple de fonction ϕ (analogue à celui du théorème 2 Chapitre 3) qui permet la détermination algorithmique effective d'une formule optimale de calcul de l'intégrale $\int_\alpha^\infty$.

On choisit $\alpha = 0$.

Soient $0 < a < 1$ et $\phi(t) = a^{-t}(-La)^{-1}$

Nous noterons H_a l'espace $H^1(\phi)$ correspondant.

On a par des calculs simples à partir de (3.2) et (3.3)

$$g^i(x) = \begin{cases} a^x & x \geq x_i \\ a^{x_i} & x \leq x_i \end{cases}$$

$$g(x) = a^x \left(x - \frac{1}{La}\right)$$

$$(g,g)_{H_a} = 2\left(\frac{1}{La}\right)^2$$

$$(g,g^i)_{H_a} = a^{x_i}\left(-\frac{1}{La} + x_i\right) = +\int_{x_i}^{\infty} \frac{+t}{\phi(t)}\, dt$$

On déduit alors de (3.7) que

$$\Phi_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{\left(a^{x_i} x_i - a^{x_{i+1}} x_{i+1}\right)^2}{a^{x_i} - a^{x_{i+1}}} - \frac{2}{La}\left(x_i a^{x_i} - x_{i+1} a^{x_{i+1}}\right) + \frac{1}{(La)^2}\left(a^{x_i} - a^{x_{i+1}}\right) \right\}$$

$$+ a^{x_N}\left(x_N - \frac{1}{La}\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\left(a^{x_i} x_i - a^{x_{i+1}} x_{i+1}\right)^2}{a^{x_i} - a^{x_{i+1}}} + x_N^2 a^{x_N} + \frac{a^{x_o}}{La}\left(\frac{1}{La} - 2x_o\right)$$

En remarquant que

$$\frac{\left(a^{x_i} x_i - a^{x_{i+1}} x_{i+1}\right)^2}{a^{x_i} - a^{x_{i+1}}} = (x_i - x_{i+1})^2 \frac{a^{x_i + x_{i+1}}}{a^{x_i} - a^{x_{i+1}}} + x_i^2 a^{x_i} - x_{i+1}^2 a^{x_{i+1}}$$

$$\Phi_N = a^{x_o}\left(x_o - \frac{1}{La}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 \frac{a^{x_i}}{a^{x_i - x_{i+1}} - 1}$$

Posons comme au Chapitre 3 $\begin{cases} y_o = x_o \\ y_i = x_i - x_{i-1} & \forall i \geq 1 \end{cases}$

$$\Phi_N = a^{y_o}\left(y_o - \frac{1}{La}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} y_{i+1}^2 \frac{a^{y_o + \ldots + y_i}}{a^{-y_{i+1}} - 1}$$

Introduisons la fonction $\psi(y) = \dfrac{y^2}{a^{-y} - 1}$

$$(3.8)\qquad \Phi_N = a^{x_o}\left[\left(x_o - \frac{1}{La}\right)^2 + \psi(y_1) + a^{y_1}\left[\psi(y_2) + a^{y_2}\left[\ldots + a^{y_{N-1}}\,\overline{\psi(y_N)}\right]\ldots\right]\right.$$

On peut alors conclure comme au théorème 2 Chapitre 3 :

Proposition 3

Il existe au moins un 2N+2-uple $A_o,\ldots,A_N \quad x_o,\ldots,x_N$ avec $0 \leq x_o < \ldots < x_N$ qui rende optimale sur H_a la formule de calcul de

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \text{ par } \sum_{i=0}^{N} A_i\, f(x_i)$$

———×———

Remarque - Constatons que la méthode développée ci-dessus ne permet pas d'obtenir une formule exacte sur $H^1(\phi)$ même avec une infinité de points. En effet, l'erreur s'écrit dans ce cas

$$e^2 = (g,g)_{H^1(\phi)} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{t\,dt}{\phi(t)}\right)^2}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dt}{\phi(t)}}$$

$$\text{et} \quad (g,g)_{H^1(\phi)} = \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{\phi(t)}$$

Si l'on avait e = 0 on aurait égalité $\forall i$ dans

$$\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{t\,dt}{\phi(t)}\right)^2 \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{t^2 dt}{\phi(t)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dt}{\phi(t)}$$

ce qui est impossible.

———×———

Majoration de l'erreur (cas de H_a)

On a vu que

$$e^2 = (g,g)_{H_a} - \Phi_N = \frac{2}{(La)^2} - \Phi_N$$

On obtient une majoration à priori assez grossière en prenant $x_i = ih$. Quelques lignes de calcul fournissent alors

$$\Phi_N = \frac{1}{(La)^2} + \frac{h^2\, a^h}{(1-a^h)^2} - \frac{h^2 a^{(N+1)h}}{(1-a^h)^2}$$

et donc

$$(3.9) \qquad e^2 = \frac{1}{(La)^2} - \frac{h^2\, a^h}{(1-a^h)^2} + \frac{h^2\, a^{(N+1)h}}{(1-a^h)^2}$$

Proposition 4

Quand N tend vers l'infini

$$(3.10) \qquad \int_0^\infty f(x)\, dx - \sum_{i=0}^{N} A_i\, f(x_i) \to 0 \qquad \forall f \in H_a$$

De plus, on a la majoration

$$(3.11) \qquad e^2 \leq a^{(N+1)h}\, (La)^{-2} + \frac{h^2}{12}$$

pour h assez petit

Démonstration : On vérifie facilement que

$$\theta_h = \frac{1}{(La)^2} - \frac{h^2\, a^h}{(1-a^h)^2} = 0 \quad \text{ssi} \quad h = 0$$

et que

$$\theta_h = \frac{h^2}{12}\left[1 - \frac{11}{20}\,(La)^2\, h^2\, (1 + \varepsilon(h))\right] \qquad \varepsilon(h) \to 0 \text{ avec } h$$

Comme

$$\frac{h^2}{(1-a^h)^2} \leq (La)^{-2}$$

on en déduit (3.11). Choisissant alors $h \to 0$ et $Nh \to \infty$, on a bien (3.10).

———X———

Numériquement, on obtient des résultats analogues à ceux du chapitre 3. Voici un tableau donnant les variations de la norme de l'erreur.

	a=0.9			a=0.5			a=0.3		
N	15	30	50	15	30	50	15	30	50
e	0,88	0,59	0,47	0,29	0,18	0,09	0,113	0,053	0,031

a = 0.5

N	15	20	30	40	50	60	100
e	0,29	0,25	0,18	0,13	0,09	0,07	0,033

La majoration (3.11) de la proposition 4 donne des résultats proches de l'erreur réelle. Par exemple pour $N = 100$ en choisissant $h = 10^{-1}$ (3.11) donne $e \leq 0.04$ alors que l'erreur réelle est 0.033.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

CHAPITRE 1

[1] ARONSZAJN N.
Theory of reproducing kernels
Trans. of the AMS 68 (1950) p. 337-404.

[2] BARANGER J. & DUC-JACQUET M.
Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables
RIRO R3 (1971) p. 61-66.

[3] BROWDER F.E. & BUI AN TON
Non linear functional equations in Banach spaces and elliptic super regularisation
Math. Zeits 105 (1968) p. 177-195.

[4] CATZ F.
Caractérisation du noyau associé aux sous espaces hilbertiens et caractérisation de ces sous espaces dans certains espaces de Banach
Séminaire Mathématiques Appliquées Grenoble (1971-72).

[5] DUCATEAU C.F.
Etude de quelques problèmes d'interpolation
Thèse Grenoble (1971).

[6] DUC-JACQUET M.
Thèse Grenoble (1973). A paraître.

[7] Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions
CRAS t 271 série A p. 795-797 (1970).

[8] GASTINEL N.
Détermination de certains sous espaces de Hilbert d'un espace normé
Séminaire Mathématiques Appliquées Grenoble (1970-71).

[9] MAURY S.
Dualité des fonctions quadratiques positives
Séminaire d'Analyse unilatérale Montpellier (1968).

[10] Sous espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique
Séminaire d'Analyse unilatérale Montpellier (1969).

[11] MIKHLIN S.G.
An advanced course in mathematical physics
North-Holland (1970).

[12] SCHWARTZ L.
Sous espaces hilbertiens et anti noyaux associés
Séminaire Bourbaki exp 238 (1961-62) p. 1-18.

[13] Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et anti noyaux associés (Noyaux reproduisants)
Journal d'Analyse Math. Jérusalem (1964) p. 115-256.

[14] SHAPIRO H.S.
Topics in approximation theory (Ch. 6)
Lecture notes in Math. Springer Verlag (1971).

[15] TEMAM R.
Analyse numérique
Collection SUP Presses Universitaires de France (1970).

CHAPITRE 2

[16] BARANGER J.
Un théorème de caractérisation de certains sous espaces hilbertiens de ℓ_1
RIRO R3 (1970) p. 131-134.

[17] Existence d'une approximation optimale pour les fonctionnelle sur les espaces de suite du type H^1
CRAS t 272 (Mars 1971) Série A p. 676-679.

[18] FOUGERES
Thèse de 3ème Cycle Besançon (1969).

CHAPITRE 3

[19] BARANGER J.
Approximation optimale de la somme d'une série
CRAS t271 (Juillet 1970) Série A p. 149-152.

[17] BARANGER J.

[6] DUC-JACQUET M.

[21] SARD A.
Best approximate integration formulas ; best approximation formulas
American Journal of Math. 71 (1949) p. 80-91.

[22] SINGER I.
Best Approximation in Normed Linera Spaces by Elements of Linear Subspaces
Springer Verlag (1970).

CHAPITRE 4

[6] DUC-JACQUET M.

[21] SARD A.

[12] SCHWARTZ L.

D E U X I E M E P A R T I E

oOo

THEOREMES D'EXISTENCE EN DENSITE

ET APPLICATION AU CONTROLE

INTRODUCTION

La motivation de ce travail est l'étude du problème d'optimisation non convexe.

Pb1 $\qquad \inf \{J(x),\ x \in S\}$

lorsque la fonction J ou l'ensemble S (ou les deux !) ne sont pas convexes.

Peu de résultats d'existence semblent connus pour Pb1 en dimension infinie. La méthode classique en calcul des variations, qui consiste à étudier la convergence d'une suite minimisante, est en général inopérante. Il arrive, en effet, fréquemment, en optimisation non convexe, que les suites minimisantes ne convergent pas, même lorsque le problème a des solutions.

Un cas particulier du Pb1 est le suivant :

Pb2 $\qquad \sup \{\|x-c\|,\ x \in S\}$

(où l'on suppose S borné).

Ce problème a été considéré par Edelstein [1]. Pour S fermé et c quelconque, il n'y a pas, en général, existence d'un $\bar{x} \in S$ réalisant le maximum ; mais Edelstein a démontré que l'ensemble des c pour lesquels il existe un tel $\bar{x}$ est dense dans l'espace de Banach X dans lequel on travaille (du moins lorsque cet espace est uniformément convexe).

Dans le Chapitre 1 ([1]), nous étendons le résultat d'Edelstein au problème

Pb3 $\qquad \sup \{J(x) + \|x-c\|,\ x \in S\}$

où J est une application semi-continue supérieurement et majorée de S dans $\mathbb{R}$:

([1]) Ce résultat ainsi que le théorème 1 du Chapitre 2 ont été annoncés dans une note au CRAS (BARANGER [1]). Les démonstrations correspondantes ainsi que les applications du Chapitre 3 vont paraître dans le Journal de Math Pures et Appliquées (BARANGER [2]).

lorsque X est uniformément convexe, l'ensemble des c pour lesquels le Pb3 possède une solution est dense dans X.

Le résultat d'Edelstein a été étendu par ASPLUND [4] : dans un espace réflexif, localement uniformément convexe, l'ensemble des c pour lesquels le Pb2 a une solution, est un G_δ dense. Nous avons étendu ce résultat au Pb3.

Edelstein [2] et STETCHKINE [1] ont obtenu indépendemment les mêmes résultats que pour le Pb2 pour le

Pb4 $\quad \inf \{\|x-c\|, x \in S\}$

Nous démontrons au Chapitre 2 l'extension correspondante :

Pb5 $\quad \inf \{J(x) + \|x-c\|, x \in S\}$

avec J semi-continue inférieurement et minorée.

On trouvera également au Chapitre 3 un théorème (théorème 2) de convergence des solutions du problème perturbé

$$\inf \{J(x) + \varepsilon \|x-c\|, x \in S\}$$

vers la solution du problème 1.

Nous donnons dans les deux derniers chapitres des application des résultats des Chapitre 1 et 2 au contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Le Chapitre 3 traite du cas où l'équation d'état est elliptique ; le Chapitre 4 de celui où cette équation est parabolique ou hyperbolique, ou encore est une inéquation variationnelle.

Voici un exemple, détaillé au Chapitre 3 § 1.2.1, qu'on peut considérer comme un "problème modèle" :

$$\begin{cases} -\nabla(u \nabla y) = f & \text{dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ de frontière régulière} \\ y \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

L'ensemble des contrôles est un fermé non convexe $\mathcal{U}_{ad}$ contenu dans

$$\mathcal{U} = \{u \in L^p(\Omega) \; ; \; 0 < \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad p.p\}$$

$$1 < p < \infty$$

Alors quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $w \in L^p(\Omega)$ pour lesquels le minimum est réalisé dans

$$\inf \{\|y(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|u-w\|_{L^p(\Omega)}, \; u \in \mathcal{U}_{ad}\}$$

est dense dans $L^p(\Omega)$.

(Noter de $u \to y(u)$ n'est pas convexe non plus).

CHAPITRE 0

oOo

RAPPELS

Ce chapitre rassemble diverses définitions et propriétés classiques nécessaires à la compréhension des chapitres suivants et que nous avons regroupées là par commodité.

PLAN DU CHAPITRE 0

1. Topologie p. 1

2. Convexité p. 1

2.1. Analyse convexe p. 1
2.2. Convexité de la norme p. 2

3. Dérivabilité p. 3

3.1. Dérivabilité de la norme p. 3
3.2. Différentiabilité des fonctions convexes p. 3

4. Opérateurs monotones. p. 3

1. TOPOLOGIE

Soit E un espace topologique.

Un sous ensemble A de E est dit rare si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Un sous ensemble est dit maigre s'il est réunion dénombrable d'ensembles rares.

On appelle résiduel le complémentaire d'un ensemble maigre.

Les espaces utilisés dans les chapitres suivants étant tous des espaces de Banach, les résiduels y seront partout denses d'après le théorème de Baire.

Un ensemble est un G_δ s'il est réunion dénombrable d'ouverts.

Pour plus de détails sur ces notions, on se reportera par exemple à BOURBAKI [1] ou CHOQUET [1].

2. CONVEXITE

2.1. Analyse convexe

Soient X et Y deux espaces vectoriels localement convexes en dualité. Soit $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. $y_o \in Y$ est un sous gradient de f en x_o si $f(x_o)$ est fini et

$$f(x) \geq f(x_o) + \langle x-x_o, y_o \rangle \qquad \forall x \in X$$

On appelle sous différentiel de f en x_o l'ensemble de ses sous gradients en x_o :

$$\partial f(x_o) = \{y_o \in Y \ ; \ f(x) \geq f(x_o) + \langle x-x_o, y_o \rangle \qquad \forall x \in X\}$$

Pour plus de précisions et tout ce qui concerne l'analyse convexe, on pourra consulter MOREAU [2] et AUBIN [1].

2.2. Convexité de la norme

Nous noterons e.v.n les espaces vectoriels normés.

Un e.v.n E est dit strictement convexe (noté (SC) dans la suite) si

$$1 - \frac{1}{2}\|x+y\| > 0 \quad \text{pour} \quad \|x\| \leq 1 \qquad \|y\| \leq 1 \qquad \text{et } x \neq y$$

Il est dit localement uniformément convexe noté (LUC) dans la suite) si

$$0 < \delta(y,\varepsilon) = \inf \{1 - \frac{1}{2}\|x+y\|,\ \|x\| \leq 1\ ,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\}$$

pour tout y tel que $\|y\| = 1$

Il est dit uniformément convexe (noté (UC) dans la suite) si

$$0 < \delta(\varepsilon) = \inf \{1 - \frac{1}{2}\|x+y\|\ ,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\}$$

Il est dit faiblement uniformément rond (noté (WUR) dans la suite) si

$\|x_n+y_n\| \to 2 \qquad \|x_n\| \to 1 \qquad \|y_n\| \to 1$ impliquent $x_n - y_n$ tend faiblement vers zéro.

On peut aussi caractériser la (LUC) par

$\|x_n+y\| \to 2 \qquad \|x_n\| \to 1 \qquad \|y\| = 1$ impliquent $\|x_n-y\| \to 0$

et la (UC) par

$\|x_n+y_n\| \to 2 \qquad \|x_n\| \to 1 \qquad \|y_n\| \to 1$ impliquent $\|x_n-y_n\| \to 0$

Les notions de (SC) et (UC) sont dues à CLARKSON [1]. Celle de (LUC) est due à LOVAGLIA [1]. Celle de (WUR) est due à SMULIAN [1].

Pour toutes les notions introduites au point 2.2, on pourra se reporter à un article de synthèse de CUDIA [1].

3. DERIVABILITE

3.1. Dérivabilité de la norme

Un espace vectoriel normé est dit (FD) si sa norme est Fréchet différentiable en tout point.

SMULIAN [1] a donné la caractérisation suivante

E est (FD) ssi $\forall x \in E \ \|x\| = 1 \qquad \forall f_n \in E^* \qquad \|f_n\| \leq 1$

$f_n(x) \to \|x\|$ alors f_n converge dans E^*.

On pourra encore consulter CUDIA [1] pour des compléments (nombreux !).

3.2. Différentiabilité des fonctions convexes

Un espace de Banach E est un (SDS) (abréviation de strongly differentiable space) si toute fonction convexe s.c.i définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et non identique à $+\infty$ est Fréchet différentiable sur un G_δ dense dans son domaine de définition dom $f = \{x \in E \ ; \ f(x) < \infty\}$

Cette notion a été introduite par ASPLUND [1] [2] qui a démontré que si l'espace de Banach E est tel que (E^* est séparable) ou (E est réflexif et a une norme équivalente (FD)) alors E est un (SDS).

4. OPERATEURS MONOTONES

Soient V un espace de Banach et V' son dual. Un opérateur $A : V' \to V$ est dit monotone si

$$(*) \qquad (Au - Av, u-v) \geq 0 \qquad \forall u, v \in V$$

Il est dit strictement monotone si dans (*) l'inégalité est stricte pour $u \neq v$.

A est dit <u>hémicontinu</u> si quels que soient u,v et w $\in$ V, la fonction $\lambda \to (A(u+\lambda v),w)$ est continue.

A est dit <u>pseudo-monotone</u> si

1°) il est borné et

2°) lorsque $u_j \to u$ dans V faible et $\overline{\lim}\ (A(u_j),u_j-u) \leq 0$ alors $\underline{\lim}\ (A(u_j),u_j-v) \geq (A(u),u-v) \quad \forall v \in V$.

A est dit <u>avoir la propriété M</u> si :

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ dans V faible} \\ Au_n \to \chi \text{ dans V' faible} \\ \overline{\lim}\ (Au_n,u_n) \leq (\chi,u) \end{cases} \Rightarrow \quad \chi = Au$$

On a les implications

A hémicontinu monotone => A pseudo monotone

=> A a la propriété M.

On pourra consulter LIONS [2] et BREZIS [1], [2] pour des compléments.

CHAPITRE 1

oOo

PROBLEMES DE MAXIMISATION SANS HYPOTHESES DE CONVEXITE

Nous étudions dans ce chapitre le problème de l'existence d'un $s \in S$ tel que, c étant donné, on ait

$$(*) \quad \sup_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|) = J(s) + \|s-c\|$$

Le § 1 est consacré au cas $J = 0$. C'est le problème des points les plus éloignés (PPE) ou "farthest points" déjà considéré par de nombreux auteurs. Nous démontrons d'abord quelques résultats simples sur la structure de l'ensemble des points de S susceptibles d'être des PPE puis deux résultats sur l'unicité de la solution de (*). Nous donnons ensuite une liste de contre exemples. Enfin, nous faisons le point sur les résultats d'existence connus (EDELSTEIN [1], ASPLUND [4], ZIZSLER [1]).

Au § 2, on a $J \neq 0$ et nous démontrons qu"en général" il existe des $s \in S$ vérifiant (*) avec des hypothèses convenables sur J,S et l'espace E dans lequel on travaille. Ces résultats généralisent ceux d'EDELSTEIN, ASPLUND et ZIZLER cités au § 1.

oOo

PLAN DU CHAPITRE 1

§ 1 - Le problème des points les plus éloignés (PPE) p. 1
1.1. Etude de l'ensemble des points pouvant être des PPE p. 2
1.2. Unicité de la solution p. 5
1.3. Existence p. 6
. Contre-exemples p. 6
. Résultats connus. p. 8

§ 2 - Le problème $\sup_{x \in S} (J(x)+\|x-c\|)$ p. 10
2.1. Utilisation des techniques d'Edelstein p. 10
2.2. Utilisation des techniques d'Asplund. p. 20

§ 1 - LE PROBLEME DES POINTS LES PLUS ELOIGNES

Soient E un espace vectoriel normé sur R et S une partie bornée de E. Soit x un point de E. On pose

$$e_S(x) = \sup_{s \in S} \|x-s\| \tag{1.1}$$

Faute d'un autre terme, j'appellerai $e_S(x)$ l'éloignement de x par rapport à S. L'ensemble des points de S les plus éloignés de x (en abrégé PPE ; en anglais "farthest points") est

$$\mathcal{L}_S(x) = \{s \in S,\ \|x-s\| = e_S(x)\} \tag{1.2}$$

Enfin, on considèrera également l'ensemble des points de S qui peuvent être des points les plus éloignés.

$$\mathcal{L}_S = \bigcup_{x \in E} \mathcal{L}_S(x) \tag{1.3}$$

On peut alors se poser (entre autres !) les quatre problèmes suivants.

Pb1 : Structure de $\mathcal{L}_S$. Je donne en 1.1 quelques résultats très simples. Il faut remarquer qu'il y a dans ce cadre des questions très difficile comme celle célèbre de montrer que si pour tout $x \in E$ $\mathcal{L}_S(x)$ est réduit à un point, alors S est réduit à un point. Pour une bibliographie de cette question et des résultats dans cette voie, cf. KLEE V. [1].

Pb2 : Unicité de la solution. Quand peut-on affirmer que $\mathcal{L}_S(x) = \emptyset$ ou ne contient qu'un seul élément ?

Pb3 : Existence de la solution. $\mathcal{L}_S(x) \neq \emptyset$. Pour ce problème de nombreux résultats sont connus, cf. 1.3 2°) ; mais il reste des questions ouvertes !

Pb4 : Continuité de la multi application $x \to \mathcal{L}_S(x)$

Dans ce paragraphe, je traite, dans l'ordre, les trois premiers problèmes. Le quatrième ne sera pas abordé.

1.1 Etude de $\mathcal{L}_S$

D'abord deux lemmes triviaux

Lemme 1

Soient $s_1, s_2 \in E$ evn, $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ $s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$. Alors $\forall x \in E$ $\exists$ i tel que

$$\|x-s_i\| \geq \|x-s\|$$

Démonstration : Si $\|x-s_1\| < \|x-s\|$ alors $\lambda_2 \neq 0$ et

$$\|x-s_2\| = \left\|\frac{1}{\lambda_2}(x-s) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x-s_1)\right\| \geq \frac{1}{\lambda_2}\|x-s\| - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\|x-s_1\| > \|x-s\|$$

---x

Lemme 2

Même hypothèse qu'au lemme 1. En plus $s_1 \neq s_2$, $0 < \lambda_1 < 1$ et E evn (SC). Alors $\forall x \in E$ $\exists$ i tel que $\|x-s_i\| > \|x-s\|$

Démonstration : Si $\|x-s_1\| \leq \|x-s\|$, supposons d'abord que x n'appartient pa à la droite (s_1,s_2). Alors

$$\|x-s_2\| = \left\|\frac{1}{\lambda_2}(x-s) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x-s_1)\right\| > \frac{1}{\lambda_2}\|x-s\| - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\|x-s_1\| \geq \|x-s\|$$

où l'inégalité centrale est stricte puisque E est (SC). Enfin si x appartient à la droite (s_1,s_2), c'est évident.

———X

Proposition 1

Soient E un evn et S une partie quelconque de E. Alors

$$\mathcal{L}_S \subset S - \overset{o}{\overline{\text{co}S}}$$

($\overset{o}{\overline{\text{co}S}}$ désigne l'intérieur de l'enveloppe convexe fermée de S, et A-B est la différence ensembliste de A et B).

Démonstration : Soit $s \in \mathcal{L}_S \cap S \cap \overset{o}{\overline{\text{co}S}}$. Il existe un $x \in E$ tel que $\|s-x\| = e_S(x)$ et il existe une boule fermée de centre s de rayon $\rho > 0$ incluse dans $\overline{\text{co}S}$

Posons $\tilde{s} = s+\rho \frac{s-x}{\|s-x\|}$ (en supposant $s \neq x$ sinon $S = \{s\}$, $\overset{o}{\overline{\text{co}S}} = \emptyset$) et $s \in \overset{o}{\overline{\text{co}S}}$. Il existe alors $s' \in \text{co}S$ tel que $\|s'-\tilde{s}\| \leq \frac{\rho}{2}$. On a $s' = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ et $s_1, s_2 \in S$.

On applique le lemme 1. $\exists$ i tel que

$$\|x-s_i\| \geq \|x-s'\| \geq \|x-\tilde{s}\| - \|\tilde{s}-s'\| \geq \|x-s\| + \frac{\rho}{2}$$

D'où la contradiction.

———X

Si on suppose la norme de E (SC), on peut montrer plus précisément :

Proposition 2

Soient E un evn (SC) et S une partie quelconque de E. Alors

$$\mathcal{L}_S \subset S \cap \mathcal{E}(\overline{\text{co}S})$$

(où $\overline{co}S$ est l'enveloppe convexe fermée de S et $\mathcal{E}(X)$ désigne l'ensemble des points extrémaux de X).

Démonstration : Soit $s \in \mathcal{L}_S \cap S$ et $s \notin \mathcal{E}(\overline{co}S)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $\|s-x\| = e_S(x)$ et $s_1, s_2 \in \overline{co}S$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ $0 < \lambda_1 < 1$ et $s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$.

D'après le lemme 2, il existe un i_o tel que

$$\|x-s_i\| > \|x-s\|$$

Posons $\delta = \|x-s_i\| - \|x-s\| > 0$. Il existe alors $s_i' \in coS$ tel que $\|s_i-s_i'\| \leq \frac{\delta}{2}$.

On peut aussi écrire $s_i' = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2$ $0 \leq \mu_1 \leq 1$ $\mu_1+\mu_2 = 1$ $t_1, t_2 \in S$.
D'après le lemme 1, il existe j tel que $\|x-t_j\| \geq \|x-s_i'\|$. Donc

$$\|x-t_j\| \geq \|x-s_i\| - \|s_i-s_i'\| \geq \|x-s\| + \frac{\delta}{2}$$

D'où la contradiction.

———X———

Si la norme de E n'est pas (SC), la propriété de la proposition 2 est fausse. Cette propriété caractérise d'ailleurs les espaces (SC) :

Proposition 3

Si $\forall S \subset E$ evn on a

$$\mathcal{L}_S \subset S \cap \mathcal{E}(\overline{co}S)$$

alors E est (SC)

Démonstration : Si E n'est pas (SC), il existe x,y tels que $\|x\| = \|y\| = 1$; $\|x+y\| = 2$, $x-y \neq 0$. Alors tout point du segment [x,y] a pour norme 1. On prend S = [x,y] . Tous les points de S sont dans $\mathcal{L}_S$, par exemple parce qu'ils sont les plus éloignés de 0. Mais les points de]x,y[ne sont pas extrémaux pour $\overline{co}S$ = [x,y].

———X———

1.2. Unicité de la solution

On pose

$$Q(S) = \{x \in E, \text{ card}\mathcal{L}_S(x) \leq 1\}$$

On entend par étude de l'unicité l'étude des propriétés de l'ensemble Q(S).

Ce travail a été effectué par STETCHKINE S.B. [1] et SINGER I. [1] pour le problème de projection sur un ensemble (cf. Chapitre 2 § 1 2°)), c'est-à-dire le problème de l'inf.

J'étudie ici le problème du sup par des techniques analogues à celles de STETCHKINE.

Proposition 4

Soient E un evn (SC) et S une partie quelconque de E. Alors

$$\overline{Q(S)} = E$$

Démonstration : Soit $x \in E-Q(S)$. On a card $\mathcal{L}_S(x) \geq 2$, donc il existe $s \in S$ tel que $\|x-s\| = e_S(x) \neq 0$.

Posons $\tilde{x} = s+(x-s)\ (1+\varepsilon\|x-s\|^{-1})$ $\qquad \varepsilon > 0$

$\|\tilde{x}-x\| = \varepsilon$. On a

$$\|\tilde{x}-s\| = \|x-s\| + \varepsilon \geq \|x-t\| + \varepsilon \qquad \forall t \in S$$

$$> \|\tilde{x}-t\| \qquad \forall t \in S \text{ et n'appartenant à la demi droite d'origine } x$$

portée par la droite (x,s), à cause de la (SC) de E. Comme il est évident que sur cette demi droite s est le seul point de $\mathcal{L}_S(\tilde{x})$ on a bien $\mathcal{L}_S(\tilde{x}) = \{s\}$.

Comme ε est arbitraire, la proposition est démontrée.

———— X ————

Proposition 5

Soit E un evn (SC) et S une partie de E telle que (*) $S \cap B$ soit relativement compact pour tout borné B. Alors Q(S) est un résiduel et si de plus S est fermé, Q(S) est un G_δ.

Démonstration : $Q(S) = E - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$ où

$\phi_n = \phi_n(S) = \{x \in E,\ D(\mathcal{L}_S(x)) \geq \frac{1}{n}\}$ (D désigne le diamètre)

Admettons d'abord que S fermé et (*) impliquent $\phi_n(S)$ fermé. Il suffit de montrer que pour S fermé $\phi_n(S)$ n'a pas de point intérieur (car $\overline{\phi_n(S)} \subset \phi_n(\overline{S})$). Soit $x \in \phi_n(S)$, il existe $s \in \mathcal{L}_S(x)$ et pour tout ε le point $\tilde{x}$ construit comme à la proposition 4 est tel que $\mathcal{L}_S(\tilde{x}) = \{s\}$ et en particulier $\tilde{x} \notin \phi_n(S)$. Que S fermé et (*) impliquent $\phi_n(S)$ fermé se démontre comme dans STETCHKINE [1].

———X———

1.3. Existence de la solution

1°) Contre-exemples

Commençons par quelques exemples de ... non existence !

Exemple 1 - Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

On considère l'ensemble $S = \{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$; S est fermé car discret $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ pour $i \neq j$. Soit un c quelconque de H $c = \sum_i c_i e_i$

$$\|c - e_i\|^2 = \|c\|^2 + 1 - 2c_i$$

Tout point c du "quadrant positif" $c_i > 0$ $\forall i$ est tel que

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \|c - e_i\| = (1 + \|c\|^2)^{1/2}$$

et ce sup n'est pas atteint. Donc c n'a pas de PPE dans S.

Exemple 2 - Même cadre. $S_1 = S \cup \{0\}$. S est cette fois faiblement compact. Mais on a encore le même résultat qu'à l'exemple 1 pour tout c tel que $c_i > 0$ pour tout i.

Exemple 3 - On peut adapter l'exemple 1 de manière à obtenir une courbe continue fermée bornée S_2 pour laquelle aucun c tel que $c_i > 0 \quad \forall i$ n'a pas de PPE dans S_2. Il suffit de considérer (par exemple) :

$$S_2 = \{s = e_i \cos\theta + e_{i+1} \sin\theta \ ; \ i \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

$$\|c-s\|^2 = 1 + \|c\|^2 - 2(c_i \cos\theta + c_{i+1} \sin\theta)$$

$\sup_{s \in S_2} \|c-s\| = (1+\|c\|^2)^{1/2}$ et ce sup n'est jamais atteint.

S est fermé comme image réciproque de $[0,\infty[$ par l'application

$$e_i \cos\theta + e_{i+1} \sin\theta \to (i-1)\frac{\pi}{2} + \theta$$

———X———

Exemple 4 - Soit E un espace vectoriel normé (SC) et non (LUC). Alors il existe dans E un fermé borné S et un point $y \in E$ qui n'a pas de PPE dans S.

Démonstration : Puisque E n'est pas (LUC), il existe $y \in E$ et une suite x_n d'éléments de E tels que $\|y\| = 1 \quad \|x_n\| \leq 1 \quad \|x_n+y\| \to 2$ et $\|x_n-y\| \geq \alpha > 0$.

Posons $S = \overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$ S est fermé, inclus dans la boule unité et $y \notin S$.

Montrons que -y n'a pas de PPE dans S

$\sup_n \|x_n+y\| = 2$ et $\|s+y\| \leq 2 \quad \forall s \in S$

Si $\exists z \in S$ tel que $\|z+y\| = 2$ on a

$$\|z+y\| = \|z\| + \|y\|$$

et comme E est (SC) $z = \lambda y \quad \lambda > 0$ et $\|z+y\| = 2$ implique $\lambda = 1$ donc $z = y$. Contradiction.

———X———

Exemple 5 - Soit $\ell_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$

$S = \{s_n = (\frac{1}{n}, 0 \ldots 0, 1, 0, \ldots) = \frac{1}{n} e_1 + e_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$

$\|s_n - s_m\| = 2 + |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \geq 2$ donc S est fermé.

Soit $c \in \ell_1$ tel que $c_1 \geq 1$ et $c_j \leq 1 \quad \forall j > 1$

$$\|s_n - c\| = c_1 - \frac{1}{n} + \sum_{\substack{j \neq 1 \\ j \neq n+1}} |c_j| + 1 - c_{n+1}$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} - c_{n+1} - |c_{n+1}|$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} - 2\, c_{n+1} \quad \text{si } c_{n+1} \geq 0$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{si } c_{n+1} \leq 0$$

Donc

$$\sup_n \|s_n - c\| = \|c\| + 1$$ et ce sup n'est pas atteint.

Enfin l'ensemble des $c \in \ell_1$ tel que $c_1 \geq 1$ et $c_j \leq 1 \quad \forall j > 1$ contient la boule de centre $(2,0,\ldots) = 2\, e_1$ et de rayon 1.

———X———

2°) Résultats connus

Le problème de l'existence des PPE a été abordé par EDELSTEIN M. [1] et ASPLUND E. [4] vers 1966. C'est ASPLUND E. [3] qui a d'abord démontré que l'ensemble des points $x \in E$ (E espace de Hilbert) ayant au moins un PPE dans S fermé et borné est dense dans E. EDELSTEIN M. [1] a alors généralisé ce résultat au cas où E est un espace de Banach (UC). Ce résultat a à nouveau été généralisé par ASPLUND E. [4] qui en utilisant des techniques fines d'analyse convexe a démontré :

Théorème A :

Soient E un espace de Banach réflexif et (LUC) et S une partie fermée bornée de E. Alors l'ensemble des points de E ayant au moins un PPE dans S est un résiduel partout dense dans E.

Ce résultat est le plus fort que je connaisse actuellement. Utilisant la méthode d'ASPLUND, ZIZLER V. [1] a démontré les trois propositions suivantes :

Proposition Z1

Soient X un Banach tel que X^* son dual topologique soit (LUC) et (SDS) et S une partie fermée de X. Alors l'ensemble des points de E ayant au moins un PPE dans S est un résiduel partout dense dans E.

Proposition Z2

Soient X un Banach (WUR) et S une partie faiblement compacte de X. Alors l'ensemble des points de E ayant au moins un PPE dans S est un résiduel partout dense dans E.

Proposition Z3

Soient X un Banach réflexif (FD) et S une partie faiblement fermée et bornée de X. Alors l'ensemble des points de E ayant au moins un PPE dans S est un résiduel partout dense dans E.

———X———

Remarque - Les exemples 1 et 3 prouvent que le résultat du théorème A n'est pas trivial même pour un espace de Hilbert. L'exemple 2 joue le même rôle pour les propositions Z2 et Z3. Enfin, l'exemple 5 (inspiré d'un exemple donné par EDELSTEIN [3] pour l'inf dans $\ell_2 \times \mathbb{R}$) montre que dans un Banach non (SC), il peut y avoir des boules de points n'ayant pas de PPE sur un fermé borné S.

§ 2 - LE PROBLEME $\sup(J(x)+\|x-c\|)$

Soient E un e.v.n sur $\mathbb{R}$, S une partie bornée de E et J une fonction définie et majorée sur S à valeurs dans $\mathbb{R}$. Je donne dans ce paragraphe des conditions assurant que l'ensemble des $c \in E$ tels qu'il existe au moins un $s \in S$ tel que

$$\sup_{x\in S} (J(x)+\|x-c\|) = J(s)+\|s-c\| \tag{2.1}$$

est un résiduel de E.

Un point s solution (2.1) sera dit J point plus éloigné de c dans S. (en abrégé JPPE).

On peut considérer le problème (2.1) de deux points de vue. Premièrement, on voudrait résoudre $\sup_{x\in S} J(x)$ et on perturbe ce problème en ajoutant une norme. C'est ce qui sera fait dans les applications. L'intérêt des résultats donnés ici est qu'il n'y a alors aucune hypothèse de type convexité ni sur J ni sur S. Deuxièmement, on considère J(x) comme une perturbation de la norme. C'est plutôt ce point de vue qui est utilisé dans la démonstration des résultats suivants.

2.1. Utilisation des techniques d'Edelstein

Théorème 1

Soient E un espace de Banach (UC), S une partie fermée borné de E et J une application de S dans $\mathbb{R}$ majorée et s.c.s.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins un JPPE dans S est dense dans E.

Ce théorème généralise le résultat d'Edelstein [1] indiqué au § 1.3. Sa démonstration utilise le lemme suivant (EDELSTEIN [1]).

Lemme 1

Soit E un Banach (UC) sur $\mathbb{R}$ $x,y \in E$ $f \in E^*$ $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$ tels que

(2.2) $\|x\| \leq 1 = \|y\| = f(y) = \|f\|$

(2.3) $\|x\| \geq 1 - 2\beta\delta(\alpha)$ où δ est le module d'uniforme convexit de E

(2.4) $\|x - \beta y\| \leq 1-\beta$

Alors $f(x) > 1-\alpha$

———X———

Démonstration du théorème : Il suffit de construire, $c_o \in E$ et $p > 0$ étant donnés arbitrairement un $c \in E$ et un $s \in S$ vérifiant (2.1) et

(2.5) $\|c-c_o\| \leq p$

Nous suivrons pour cela le schéma suivant :

1°) Construction d'une suite $c_n \in X$, d'une suite $x_n \in S$ et d'une suite $r_n \in \mathbb{R}$; $n \in I$ ensemble d'indices.

Si I est fini, le théorème est démontré.

Si I est infini, on enchaîne sur

2°) La suite c_n converge vers c tel que $\|c-c_o\| < p$

3°) Construction d'une suite y_n convergente.

4°) Construction d'une sous-suite x_{n_p} extraite de x_n et convergente vers

5°) s réalise le maximum.

Cette démonstration est calquée sur celle d'EDELSTEIN. Les difficultés supplémentaires sont résolues grâce à l'introduction de la suite y_n du 3°) qui est inutile si J=0. Cette considération rend les points 4°) et 5°) plus délicats.

1°) Construction des trois suites

On pose $r_1 = \sup_{x \in S} (\|x-c_o\| + J(x))$

$$r_1 \leq \sup_{x \in S}(\|x-c_o\| + \sup_{x \in S} J(x))$$

Comme J est majorée et S est borné $r_1 < \infty$. En remplaçant J par $j-r_1 + \omega(\omega > 0)$, on peut supposer $r_1 > 0$.

Soit $0 < p < r_1$. δ désigne le module d'uniforme convexité de E.

Alors, ou bien $c_o \in S$ et c_o est le seul point $x_1 \in S$ tel que

$$r_1 \geq \|x_1-c_o\| + J(x_1) > r_1 - \frac{P}{2}\delta(1) \tag{2.6}$$

ce qui implique $J(c_o) = r_1$ donc

$\sup_{x \in S} (J(x) + \|x-c_o\|) = J(c_o)$, et le théorème est démontré en prenant $s = c = c_o$.

Ou bien $\exists x_1 \in S$ $x_1 \neq c_o$ vérifiant (2.6). On pose

$$c_1 = c_o + \frac{P}{2} \frac{c_o-x_1}{\|c_o-x_1\|}$$

On définit ensuite par récurrence

$$r_n = \sup_{x \in S} (\|x-c_{n-1}\| + J(x)) \tag{2.7}$$

Si $c_{n-1} \in S$ et si c_{n-1} est le seul point $x_n \in S$ tel que

(2.8) $$r_n \leq \|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) > r_n - \frac{P}{2^n}\delta^{n+1}(1)$$

cela implique comme plus haut que le théorème est démontré en prenant $s = c = c_{n-1}$

Sinon $\exists x_n \in S$ $\underline{x_n \neq c_{n-1}}$ vérifiant (2.8). On pose

(2.9) $$u_n = \frac{c_{n-1} - x_n}{\|c_{n-1} - x_n\|}$$

(2.10) $$c_n = c_{n-1} + \frac{P}{2^n} u_n$$

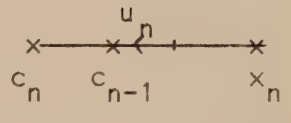

Figure 1

On peut donc supposer que les suites ainsi construites sont infinies (sinon le théorème est démontré). Par contre, pour écrire (2.8), il faut justifier que r_n est fini. Le lemme suivant donne plus :

Lemme 2

On a

(2.11) $$r_n + \frac{P}{2^n} - \frac{P}{2^n}\delta^{n+1}(1) \leq r_{n+1} \leq r_n + \frac{P}{2^n}$$

En particulier

(2.12) r_n est croissante et majorée (donc convergente).

Démonstration : $r_{n+1} = \sup_{x\ S} (\|x - c_n\| + J(x)) \leq \sup_{x\ S} (\|x - c_{n-1}\| + J(x)) + \|c_n - c_{n-1}\|$

$$r_{n+1} \leq r_n + \frac{P}{2^n} \quad \text{d'après (2.10)}$$

On en déduit par addition

$$r_n \leq r_1 + \frac{P}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \leq r_1 + p$$

D'autre part

$$r_{n+1} \geq \|x_n - c_n\| + J(x_n)$$

$$= \|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) + \|c_n - c_{n-1}\| \quad \text{d'après (2.10)}$$

$$\geq r_n - \frac{P}{2^n}\,\delta^{n+1}(1) + \frac{P}{2^n} \quad \text{d'après (2.8)}$$

Comme $\delta^{n+1}(1) \leq \frac{1}{2^n} \leq 1$ car δ vérifie $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

On a aussi que r_n est croissante.

———————×

2°) Convergence de la suite c_n

D'après (2.10) c_n est de Cauchy. Soit c sa limite

$$\|c - c_o\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - c_{k+1}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P}{2^{k+1}} = p$$

qui est la relation (2.5).

La suite x_n n'est peut-être pas convergente. Pour montrer qu'elle contient une sous-suite convergente, nous allons d'abord fabriquer une suite y_n.

3°) Construction de y_n

On pose

(2.13) $$y_n = x_n - u_n\, J(x_n)$$

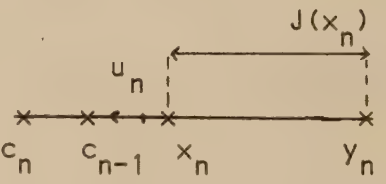

Figure 2

On a alors d'après (2.9)

$$\|y_n - c_{n-1}\| = \|x_n - c_{n-1} - u_n J(x_n)\| = \|-u_n [\|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n)]\|$$

Le crochet est positif car minoré d'après (2.8) et (2.12) par

$$(2.14) \qquad r_n - \frac{P}{2^n} \delta^{n+1}(1) \geq r_1 - \frac{P}{2^{2n+1}} > r_1 - \frac{P}{2} > 0$$

D'où

$$(2.15) \qquad \|y_n - c_{n-1}\| = \|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) > 0$$

et aussi

$$(2.16) \qquad u_n = \frac{c_{n-1} - y_n}{\|c_{n-1} - y_n\|}$$

La convergence de y_n résulte alors du

Lemme 3

La suite y_n définie par (2.13) est de Cauchy.

Démonstration : Posons

$$(2.17) \qquad R_n = r_n + \frac{P}{2^n}$$

D'après (2.15) et (2.8)

$$\|y_n - c_n\| \leq \|y_n - c_{n-1}\| + \|c_n - c_{n-1}\| \leq r_n + \frac{P}{2^n} = R_n$$

D'après (2.8) et (2.11)

$$\|y_{n+1} - c_{n-1}\| \leq r_{n+1} \leq R_n$$

Donc

$$(2.18) \qquad \left\| \frac{y_n - c_n}{R_n} \right\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{y_{n+1} - c_{n-1}}{R_n} \right\| \leq 1$$

Supposons d'abord qu'il existe $f_n \in X^*$ (dual topologique de X) tel que

(2.19) $$\|f_n\| = 1$$

(2.20) $$f_n\left(\frac{y_n - c_n}{R_n}\right) > 1 - \delta^n(1)$$

(2.21) $$f_n\left(\frac{y_{n+1} - c_n}{R_n}\right) > 1 - \delta^n(1)$$

Alors

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{y_n - c_n}{R} + \frac{y_{n+1} - c_n}{R}\right\| \|f_n\| \geq \frac{1}{2}\left[f_n\left(\frac{y_n - c_n}{R_n}\right) + f_n\left(\frac{y_{n+1} - c_n}{R_n}\right)\right] \geq 1 - \delta^n(1)$$

Et d'après (2.18) par définition de δ, on a

$$\left\|\frac{y_n - c_n}{R_n} - \frac{y_{n+1} - c_n}{R_n}\right\| \leq \delta^{n-1}(1)$$

Soit encore

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq R_n\, \delta^{n-1}(1) \leq (r_1 + 2p)\, \delta^{n-1}(1) \leq (r_1 + 2p)\, \frac{1}{2^{n-1}}$$

en utilisant le lemme 2 et la majoration $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Le lemme est donc démontré si on construit f_n vérifiant (2.19), (2.20), (2.21).

D'après le théorème de Hahn Banach, il existe $f_n \in X^*$ tel que

(2.22) $$\|f_n\| = f_n(-u_n) = \|u_n\| = 1$$

Alors

$$f_n\left(\frac{y_n - c_n}{R_n}\right) = \frac{1}{R_n} f_n\left(y_n - c_{n-1} - \frac{P}{2^n} u_n\right) \text{ d'après (2.10)}$$

$$= \frac{1}{R_n} f_n\left(x_n - c_{n-1} - u_n\left(J(x_n) + \frac{P}{2^n}\right)\right) \text{ d'après (2.13)}$$

$$= \frac{1}{R_n}\left[\|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) + \frac{P}{2^n}\right] \text{ d'après (2.22)}$$

$$> \frac{1}{R_n}\left[r_n - \frac{P}{2^n}\delta^{n+1}(1) + \frac{P}{2^n}\right] \qquad \text{d'après (2.8)}$$

$$= 1 - \frac{P}{2^n R_n}\delta^{n+1}(1)$$

Mais $\quad \delta^{n+1}(1)\,\frac{P}{2^n R_n} < \delta^{n+1}(1) \leq \delta^n(1)$ d'après (2.17)

et la croissance de δ.

On a donc vérifié (2.19) et (2.20). Pour démontrer (2.21), nous utilisons le lemme 1 avec $\beta = \frac{P}{2^n R_n}$, avec $\alpha = \delta^n(1)$, $f = f_n$

$$y = u_n,\ x = \frac{y_{n+1} - c_n}{R_n}$$

On a $\quad R_n > r_1 + \frac{P}{2^n} > p + \frac{P}{2^n}$ donc $\beta < \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2}$

$$\|x\| = \left\| \frac{x_{n+1} - c_n - u_{n+1}\, J(x_{n+1})}{R_n} \right\| = \frac{\left\| x_{n+1} - c_n \right\| + J(x_{n+1})}{R_n} \leq \frac{r_{n+1}}{R_n} \leq 1$$

d'après (2.11) et (2.17). Donc (2.2) est vérifié.

D'autre part

$$\|y_{n+1} - c_n\| = \|x_{n+1} - c_n\| + J(x_{n+1}) > r_{n+1} - \frac{P}{2^{n+1}}\delta^{n+2}(1) \quad \text{d'après (2.8)}$$

$$\geq r_n + \frac{P}{2^n} - \frac{P}{2^n}\delta^{n+1}(1) - \frac{P}{2^{n+1}}\delta^{n+2}(1) \quad \text{d'après (2.11)}$$

$$\geq R_n - \frac{P}{2^{n-1}}\delta^{n+1}(1) \qquad \delta \text{ étant croissante.}$$

Cette relation n'est autre que (2.3).

Reste (2.4) :

$$\frac{y_{n+1} - c_n}{R_n} + \beta\, u_n = \frac{y_{n+1} - c_{n-1}}{R_n} \quad \text{d'après (2.10) et la définition de } \beta$$

$$1 - \beta = (R_n - \frac{P}{2^n}) \frac{1}{R_n} = \frac{r_n}{R_n}$$

Si on avait $\|y_{n+1}-c_{n-1}\| > r_n$ on aurait d'après (2.13)

(2.23) $$r_n < \|x_{n+1}-c_{n-1}\| + \|y_{n+1}-x_{n+1}\| = \|x_{n+1}-c_{n-1}\| + |J(x_{n+1})|$$

D'après le lemme 5, r_n converge, alors d'après (2.8)

$\|x_n-c_{n-1}\| + J(x_n)$ converge. Comme S est borné, $|J(x_n)|$ est borné et par addition d'une constante convenable, on peut supposer $J(x_n) \geq 0$ $\forall n$

Alors (2.23) est en contradiction avec (2.7).

On a donc (2.4) donc (2.21) d'après le lemme 1.

———————x———————

4°) Construction d'une sous-suite x_{n_p} convergente

Notons que (2.15), (2.8) et (2.14) entraînent

$$\|y_n-c_{n-1}\| > r_1 - \frac{P}{2} > 0$$

donc si on appelle y la limite de y_n définie par le lemme 3

$$\|y-c\| > 0$$

On peut donc poser

(2.24) $$u = \frac{c-y}{\|c-y\|}$$

Alors u_n définie en (2.16) converge vers u.

Nous avons déjà remarqué que $J(x_n)$ est borné. Il existe donc une sous-suite x_{n_p} extraite de la suite x_n telle que

$$\overline{\lim_n} J(x_n) = \lim_p J(x_{n_p}) = \theta < +\infty \tag{2.25}$$

Reprenant alors (2.13) sous la forme

$$x_{n_p} = y_{n_p} + u_{n_p} J(x_{n_p})$$

on voit que x_{n_p} converge vers

$$s = y + u\,\theta \tag{2.26}$$

5°) s réalise le maximum

D'après (2.24), (2.26) et la scs de J, on a

$$\|s-c\| = \|y-c\| - \theta \geq \|y-c\| - J(s)$$

d'où

$$\|s-c\| + J(s) \geq \|y-c\| = \lim_n \|y_n - c_n\|$$

$$= \lim_n r_n = \lim_n \sup_x (\|x-c_{n-1}\| + J(x)) \text{ d'après (2.8)}$$

$$= \sup_x (\|x-c\| + J(x))$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

2.2. Utilisation des techniques d'Asplund

Voici d'abord une généralisation du théorème A du § 1.3.

Théorème 2

Soient E un espace de Banach (LUC) et réflexif, S une partie fermée bornée de E et J une application scs et majorée de S dans $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins un JPPE dans S est un résiduel dense dans E.

Démonstration : On reprend la démonstration d'Asplund [4]. La fonction $r(x) = \sup_{s\in S} (\|x-s\| + J(s))$ est convexe, lipschitzienne de constante 1 et

$$\sup_{x\in B(y,b)} r(x) = \sup_x [\sup_s (\|x-s\| + J(s))] = \sup_s (\|y-s\| + J(s)) + b = r(y) + b$$

Il résulte alors du corollaire du lemme 3 d'Asplund qu'il existe un résiduel G dense dans E tel que pour tout $y \in G$ $\partial r(y)$(*) ne contienne que des éléments de norme 1.

Soit $p \in \partial r(y)$, $\|p\|^* = 1$. On a

$$r(x) \geq r(y) + \langle p, x-y\rangle \qquad \forall x \in B \quad \text{et donc}$$

$$(2'.1) \qquad r(2y-x) \geq r(y) + \langle p, y-x\rangle \qquad \forall x \in B$$

L'espace E étant réflexif, il existe un $x \in B(y,r(y))$ boule fermée de centre y de rayon r(y) tel que

$$\langle p, x-y\rangle = -r(y)$$

Alors d'après (2'.1) $r(2y-x) \geq 2r(y)$. D'autre part

$$r(2y-x) = \sup_{s\in S} (\|2y-x-s\| + J(s))$$

$$\leq \|y-x\| + \sup(\|y-s\| + J(s)) \leq 2r(y)$$

(*) Cf. 5 Chapitre 0

Donc $r(2y-x) = 2r(y)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $s_n \in S$ tel que

$$(2'.2) \qquad \|2y-x-s_n\| + J(s_n) \geq 2r(y) - \delta\left(\frac{1}{n}, \frac{y-x}{r(y)}\right)$$

où $\delta(\varepsilon,t)$ désigne le module d'uniforme convexité locale de E au point t où $\|t\| = 1$. (On peut toujours, comme au début de la démonstration du théorème 1, se ramener à $r(y) > 0$).

Posons

$$u_n = \frac{s_n+x-2y}{\|s_n+x-2y\|} \quad \text{et}$$

$$t_n = s_n + u_n J(s_n)$$

(Remarquons que si tous les $s_n \in S$ qui réalisent (2'.2) sont tels que $\|2y-x-s_n\| = 0$, on a alors $s_n = 2y-x$ pour n assez grand donc d'après (2'.2) $\|2y-x-(2y-x)\| + J(2y-x) \geq r(2y-x)$; on peut donc supposer $s_n+x-2y \neq 0$, ce qui permet de définir u_n).

Alors $\|2y-x-t_n\| = \|2y-x-s_n\| + J(s_n)$ et (2'.2) implique puisque E est (LUC) que

$$\|t_n-x\| \leq \frac{1}{n} r(y)$$

Donc t_n converge vers x et u_n converge vers $\frac{x-y}{\|x-y\|} = u$

D'autre part, il existe une suite s_{n_q} extraite de s_n telle que $\overline{\lim_n} J(s_n) = \lim_q J(s_{n_q}) = \theta$

On a $$s_{n_q} = t_{n_q} - u_{n_q} J(s_{n_q})$$

Quand q tend vers l'infini, s_{n_q} converge fortement vers

$$s = x-u\,\theta \qquad s \in S \quad \text{et}$$

$$\|s-y\| + J(s) = \|x-u\theta-y\| + J(s)$$

$$= \big|\, \|x-y\| - \theta \,\big| + J(s)$$

$$\geq \|x-y\| + J(s) - \theta$$

et comme J est scs

$$\|s-y\| + J(s) \geq \|x-y\| = r(y)$$

———X———

On peut également généraliser par la même technique les propositions Z1, Z2, Z3 du § 1.3.

Proposition 1

Soient X un Banach de dual X^*(LUC) et (SDS), S une partie fermée de X et J une application s.c.s et majorée de S dans $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins un JPPE dans S est un résiduel dense dans E.

Proposition 2

Soient X un Banach (WUR), S une partie faiblement compacte de X et J une application s.c.s et majorée de S dans $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins un JPPE dans S est un résiduel dense dans E.

Proposition 3

Soient X un Banach réflexif (FD), S une partie faiblement fermée bornée de X et J une application s.c.s et majorée de S dans $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins un JPPE dans S est un résiduel dense dans E.

Démonstration : L'adaptation de la démonstration du théorème 2 aux cas des propositions 1 et 2 est facile. Je donne ici une démonstration de la proposition 3 basée sur une méthode différente de celle de ZIZSLER.

La réflexivité de X implique comme au théorème 2 l'existen d'un x tel que $\|x-y\| = r(y)$ et

$$r(2y-x) = 2r(y)$$

Donc il existe $s_n \in S$ tel que

$$\|2y-x-s_n\| \geq 2r(y) - \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n \to 0 \text{ qd } n \to \infty)$$

Il existe aussi $f_n \in X^*$ telle que $\|f_n\| = 1$ et

$$f_n(2y-x-s_n) = \|2y-x-s_n\|$$

Alors

$$r(y) \geq f_n(y-x) = f_n(2y-x-s_n) - f(y-s_n)$$

$$\geq 2r(y) - \varepsilon_n - \|y-s_n\| \geq r(y) - \varepsilon_n$$

Donc $f_n\left(\frac{y-x}{r(y)}\right) \to 1 = \frac{\|y-x\|}{r(y)}$

Il résulte alors d'une caractérisation de la (FD) de X due à SMULIAN [1] (*) que f_n converge fortement vers un $f \in X^*$ (et $\|f\| = 1$ De plus

$$r(y) \geq f(y-s_n) = f(2y-x-s_n) - f(y-x) \to r(y)$$

S étant faiblement compact, il existe une sous suite s_n faiblement converge vers $s \in S$. Alors

$$\|s-y\| \geq f(s-y) = r(y)$$

Ceci démontre la proposition Z3. Le passage de Z3 à la proposition 3 se fa comme au théorème 2.

(*) Cf. Chapitre 0

X

Remarque - On suppose les hypothèses du théorème 2 vérifiées. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et $\tilde{c} \in E$ arbitraires. Alors d'après le théorème 2, il existe $c = c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$ et $s = s(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in S$ tels que

$$(2''.1) \qquad \begin{cases} J(s) + \varepsilon_1 \|s-c\| = \sup_{x \in S} (J(x) + \varepsilon_1 \|x-s\|) \\ \|c-\tilde{c}\| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

Proposition 4

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \text{ borné}}} J(s(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \sup_{x \in S} J(x)$$

Démonstration :

$$J(x) \leq J(x) + \varepsilon_1 \|x-c\| \leq J(s) + \varepsilon_1 \|s-c\|$$

D'où

$$\sup_{x \in S} J(x) - \varepsilon_1 \|s-c\| \leq J(s) \leq \sup_{x \in S} J(x)$$

———X———

Remarque - Signalons un résultat du même type que ceux présentés ici pour $\sup_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|^2)$ obtenus par Asplund [1] [2] et que l'on peut énoncer ainsi :

Soit S un fermé borné d'un espace de Hilbert H et J une application scs et majorée (cette hypothèse peut être affaiblie) de S dans $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des $c \in E$ pour lesquels il existe un $s \in S$ unique tel que

$$J(s) + \|s-c\|^2 = \sup_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|^2)$$

est un G_δ dense dans E.

Ce résultat peut être étendu à une perturbation $\theta(x,c)$ avec des hypothèses convenables sur θ (BARANGER J. et TEMAM R. [1]).

CHAPITRE 2

oOo

PROBLEMES DE MINIMISATION SANS HYPOTHESES DE CONVEXITE

Nous étudions dans ce chapitre le problème de l'existence d'un $s \in S$ tel que c étant donné, on ait

$$(*) \qquad \inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|) = J(s) + \|s-c\|$$

Le § 1 est consacré au cas $J = 0$. Il contient essentiellement des indications bibliographiques et un résumé des résultats connus. Nous y donnons également quelques contre-exemples.

Dans le § 2, J est différente de zéro et nous démontrons que "presque toujours" il existe un $s \in S$ vérifiant (*) pourvu que l'on fasse des hypothèses convenables sur J, S et l'espace E dans lequel on travaille.

Enfin le § 3 donne un résultat de convergence du "problème perturbé".

PLAN DU CHAPITRE 2

§ 1 - Projection sur un ensemble p. 1

1.1. Introduction p. 1
1.2. Résultats d'existence "presque toujours" vrais p. 2
1.3. Contre-exemples p. 3

§ 2 - Le problème $\inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|)$ p. 4

§ 3 - Un théorème de convergence des solutions du problème perturbé. p. 17

§ 1 - PROJECTION SUR UN ENSEMBLE

1.1. Introduction

Soient E un evn sur $\mathbb{R}$ et S une partie de E. Soit x un point de E. On pose

$$d_S(x) = \inf_{s \in S} \|x-s\| \tag{1.1}$$

On appelle $d_S(x)$ la distance de x à S. L'ensemble des points de S les plus proches de x que l'on pourrait noter PPPx mais qu'il est d'usage d'appeler par abus de langage projections de x sur S (en anglais nearest points) est

$$\mathcal{P}_S(x) = \{s \in S,\ \|x-s\| = d_S(x)\} \tag{1.2}$$

On peut également considérer comme au Chapitre 1

$$\mathcal{P}_S = \bigcup_{x \in E} \mathcal{P}_S(x) \tag{1.3}$$

et on a encore les quatre problèmes analogues à ceux du Chapitre 1.

Pb 1 - Structure de $\mathcal{P}_S$. On trouvera des indications à ce sujet dans l'appendice du livre de SINGER I. [1] (avec E espace métrique). On peut rattacher à ce problème le problème (*) des ensembles de Chebychef : si pour tout point x de E on a card $\mathcal{P}_S(x) = 1$ l'ensemble S est un convexe fermé. Pour une bibliographie de la question, on se reportera là encore à KLEE V. [1].

Pb 2 - Unicité de la solution. C'est l'étude de l'ensemble des points x tels que card $\mathcal{P}_S(x) \leq 1$. Ce travail a été effectué par STETCHKINE S.B. [1] et on trouvera un exposé de ses résultats dans SINGER I. [1] p. 375.

pB 3 - Existence de la solution. C'est l'Etude de l'ensemble des points x tels que card $\mathcal{P}_S(x) \geq 1$. Pour E (UC) et S convexe, c'est un problème résolu. On a caractérisé la solution dans ce cadre pour un grand nombre d'espaces E classiques en analyse. Le livre de SINGER I. [1] contient une étude très complète du cas où S est un sous espace vectoriel.

(*) toujours ouvert !

Des résultats "presque toujours" vrais ont été obtenus par STETCHKINE S.B. [1] et EDELSTEIN M. [2] . Voir le 2°).

Pb 4 - Continuité de la multiapplication $x \to \mathcal{S}_S(x)$. Des résultats ont été obtenus par DEUTSCH, POLLUL et SINGER [1] dans le cas où S est un sous espace vectoriel.

Dans le cas convexe, la continuité et le caractère lipschitz de $x \to \mathcal{S}_S(x)$ ont été étudiés par HOLMES R.B. [1]. Signalons aussi des résultats sur la continuité et la dérivabilité de l'application prox obtenus par l'équipe de Montpellier(ARIS H. [1] LESCARRET C. [1].)

1.2. Résultats d'existence "presque toujours" vrais

Dans l'article déjà cité et paru en 1963,en russe, STETCHKINE S.B. a démontré le résultat suivant

Théorème S

Soient E un Banach (UC) et S une partie fermée de E. Alors l'ensemble des $x \in E$ tels que card $\mathcal{S}_S(x) = 1$ est un résiduel dense dans X.

EDELSTEIN M. a obtenu en 1966 un résultat légèrement plus faible par un chemin plus détourné inspiré de ses travaux sur les farthest points.

Théorème E

Soient E un Banach (UC) et S une partie fermée de E. Alors l'ensemble des $x \in E$ tels que card $\mathcal{S}_S(x) \geq 1$ est dense dans X.

C'est ce dernier résultat que nous avons généralisé au § 2. Donnons d'abord quelques contre-exemples.

1.3. Contre-exemples

Exemple 1 - On reprend l'exemple 1 du Chapitre 1 avec c appartenant au quadrant négatif $c_i < 0 \quad \forall i$. c n'est pas projetable sur $S = \{e_i, i \in \mathbb{N}\}$.

L'exemple 2 n'a pas d'analogue puisque si S est faiblement fermé et E réflexif tout point est projetable sur S.

L'exemple 3 est encore valable avec $c_i < 0 \quad \forall i$.

Exemple 2 - C'est une légère modification de l'exemple 5 chapitre 1

$S = \{s_n = -\frac{1}{2} e_1 - e_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est fermé

Soit $c \in \ell_1$ tel que $c_1 \leq -1$ et $c_j \geq -1 \quad \forall j > 1$

$$\|c-s_n\| = |c_1 + \frac{1}{n}| + \sum_{\substack{j\neq 1 \\ j\neq n+1}} |c_j| + |c_{n+1}+1|$$

$$= -c_1 - \frac{1}{n} + \sum_{\substack{j\neq 1 \\ j\neq n+1}} |c_j| + c_{n+1}+1$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} + c_{n+1} - |c_{n+1}|$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{si } c_{n+1} \geq 0$$

$$= \|c\| + 1 - \frac{1}{n} + 2c_{n+1} \quad \text{si } c_{n+1} \leq 0$$

Donc $\inf_{s\in S} \|c-s\| = \|c\| + 1$ et cet Inf n'est pas atteint.

Enfin l'ensemble des $c \in \ell_1$ tels que $c_1 \leq -1$ et $c_j \geq -1 \quad \forall j > 1$ contient l. boule de centre $-2e_1$ et de rayon 1.

———X———

§ 2 - LE PROBLEME $\inf_{x \in S} (J(x)+\|x-c\|)$

Soient E un e.v.n sur $\mathbb{R}$, S une partie de E et J une application de S dans $\mathbb{R}$ minorée.

Je m'intéresse dans ce paragraphe à l'existence de J-projections d'un point $c \in E$;c'est-à-dire de points $s \in S$ tels que

$$\inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|) = J(s) + \|s-c\| \tag{2.1}$$

Nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 1

Soient E un Banach (UC), S une partie fermée de E et J une application de S dans $\mathbb{R}$ minorée et s.c.s.

Alors l'ensemble des $c \in E$ ayant au moins une J projection sur S est dense dans E.

Démonstration : J'utiliserai le lemme suivant

Lemme de la lunule (EDELSTEIN)

Soient E un Banach (UC), $\alpha \in \mathbb{R}$ $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in E$, $y \in E$ tels que

$$\|x\| \geq \|y\| = 1 \tag{2.2}$$

$$\|x - \tfrac{1}{2}\delta(\alpha)y\| < 1 - \tfrac{1}{2}\delta(\alpha) + \delta(\alpha)\,\delta^2(\alpha) \tag{2.3}$$

où δ est le module d'uniforme convexité de E et $\delta^2(\alpha)$ désigne $\delta[\delta(\alpha)]$

Alors

$$\|x-y\| \leq \alpha$$

———— X ————

Pour la démonstration, nous renvoyons à EDELSTEIN [2]. Un lemme du même genre est utilisé par STETCHKINE [1]. La dénomination lemme de la lunule s'explique clairement quand on regarde la figure ci-dessous.

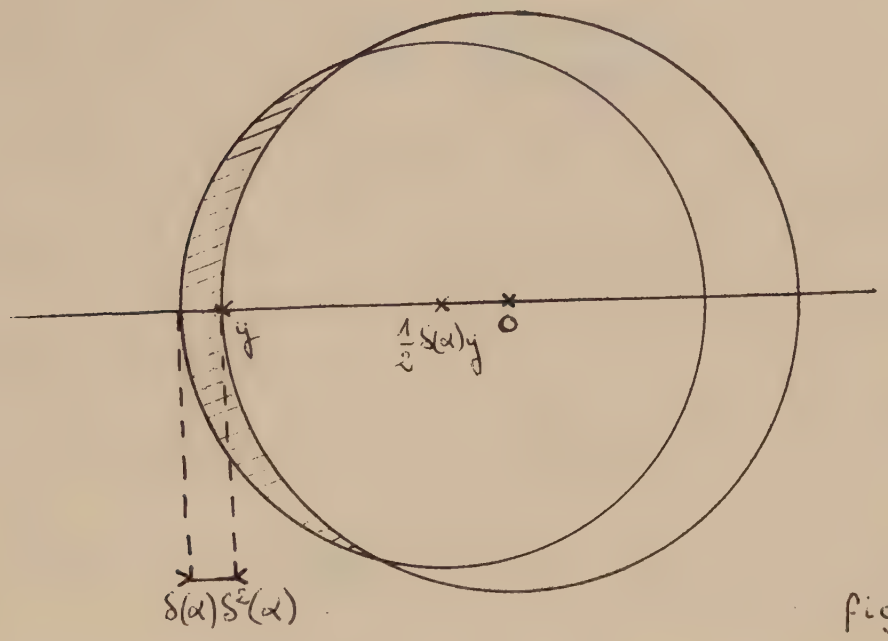

fig 1

Nous utiliseront également le lemme suivant.

Lemme 1

Soit X un espace vectoriel normé. Soient trois points

a, o, b ∈ X tels que

$\|a-o\| \geq \alpha > 0$, $\|b-a\| \geq \beta > 0$, $\|b-o\| = \delta$

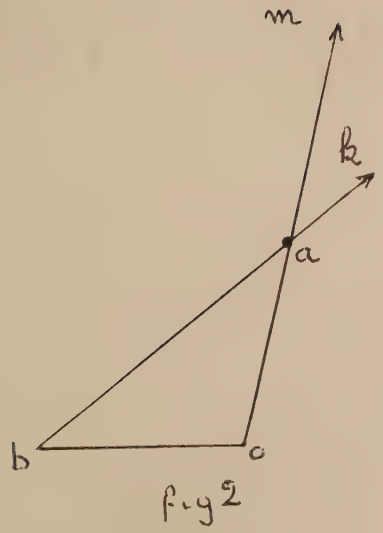

fig 2

On définit m et k par

$a-b = \lambda(k-b)$ $\quad \lambda > 0$

$\|k-b\| = 1$

$a-o = \mu(m-o)$ $\quad \mu > 0$

$\|m-o\| = 1$

Alors il existe une constante K telle que

$$\|m-k\| \leq K\,\delta$$

Démonstration : On a immédiatement

$$\beta \leq \|a-b\| = \lambda$$

$$\alpha \leq \|a-o\| = \mu$$

De plus

$$k = \frac{a}{\lambda} + (1 - \frac{1}{\lambda})\, b$$

$$m = \frac{a}{\mu} + (1 - \frac{1}{\mu})\, 0$$

$$k-m = a\,(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}) + (1 - \frac{1}{\lambda})\, b - (1 - \frac{1}{\mu})\, o$$

$$= (a-b)\,(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}) + (b-o)\,(1 - \frac{1}{\mu})$$

$$\left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right| = \left| \frac{1}{\|a-b\|} - \frac{1}{\|a-o\|} \right| \leq \frac{\|b-o\|}{\|a-b\|\,\|a-o\|}$$

D'où

$$\|k-m\| \leq \delta\,(\frac{2}{\alpha} + 1)$$

———X———

Démonstration du théorème 1 : Démontrer le théorème 1 équivaut à fabriquer pour $c_o \in X$ et $p > 0$ assez petit tous deux arbitraires, un $c \in X$ et un $s \in S$ tels que

(2.4.) $$\|c-c_o\| \leq p$$

(2.5) $$\|s-c\| + J(s) = \inf_{x \in S}(\|x-c\| + J(x))$$

Nous suivons pour cela le schéma suivant :

1°) Construction d'une suite $c_n \in X$, d'une suite $x_n \in S$ et d'une suite $r_n \in \mathbb{R}$; $n \in I$ ensemble d'indices.

Si I est fini, le théorème est démontré.

Si I est infini, on enchaîne sur

2°) Les c_n convergent vers c tel que $\|c-c_o\| < p$

3°) Début de l'étude de la convergence de x_n

Si Inf $\|x_{n+1}-c_n\| = 0$, le théorème est démontré.

Sinon on enchaîne sur

4°) Construction de deux suites y_n et z_n.

5°) Etude de la convergence de y_n. On majore :

$$\|y_{n+1}-y_n\| \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

5°/i) $$\lambda_i \leq \frac{k_i}{2^n} \qquad i = 1, 2, 3$$

6°) Construction d'une sous-suite x_{n_p} convergente vers s.

7°) s réalise le minimum.

———X———

1°) <u>Construction des trois suites</u>

On pose $$r_1 = \inf_{x \in S} (\|x-c_o\| + J(x))$$

J étant minorée, on peut la supposer positive.

Si $r_1 = 0$, il existe une suite x_n telle que

$$\|x_n - c_o\| + J(x_n) \to 0$$

donc $\|x_n - c_o\| \to 0$ et $c_o \in S$. De plus d'après la s.c.i de J

$$0 \leq J(c_o) \leq \underline{\lim}_n \; J(x_n) = 0$$

On prend $s = c = c_o$ et le théorème est démontré.

Si $r_1 \neq 0$ soit $0 < p < r_1$

Si $c_o \in S$ et est le seul $x_1 \in S$ tel que

$$r_1 \leq \|x_1 - c_o\| + J(x_1) < r_1 \left[1 + \frac{1}{4}\delta\left(\frac{P}{2r_1}\right)\delta^2\left(\frac{P}{2r_1}\right)\right] \tag{2.6}$$

cela implique $J(c_o) = r_1$, donc on peut prendre encore $s = c = c_o$ et le théorème est démontré.

Sinon $\exists x_1 \in S$ $\underline{x_1 \neq c_o}$ vérifiant (2.6). On pose

$$u_1 = \frac{x_1 - c_o}{\|x_1 - c_o\|} \quad \text{et} \quad c_1 = c_o + \frac{r_1}{2}\delta\left(\frac{P}{2r_1}\right) u_1$$

On définit par récurrence

$$r_n = \inf_{x \in S} \|x - c_{n-1}\| + J(x) \tag{2.7}$$

si $c_{n-1} \in S$ et est le seul $x_n \in S$ tel que

$$r_n \leq \|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) < r_n \left[1 + \frac{1}{4}\delta\left(\frac{P}{2^n r_n}\right)\delta^2\left(\frac{P}{2^n r_n}\right)\right] \tag{2.8}$$

cela implique comme plus haut que $r_n = J(c_n)$. On peut donc prendre $s = c = c_{n-1}$ et le théorème est démontré.

Sinon $\exists x_n \in S$ $\underline{x_n \neq c_{n-1}}$ vérifiant (2.8). On pose

(2.9) $$u_n = \frac{x_n - c_{n-1}}{\|x_n - c_{n-1}\|}$$

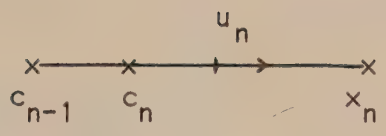

Figure 3

(2.10) $$c_n = c_{n-1} + \frac{r_n}{2}\ \delta\left(\frac{P}{2^n r_n}\right) u_n$$

On peut supposer que les suites ainsi construites sont infinies (sinon le théorème est démontré).

Par contre pour écrire (2.8) et (2.10), il faut que r_n soit fini non nul. Nous allons démontrer plus dans le

Lemme 2

On a

(2.11) $$r_n\ (1 - \frac{\delta_n}{2}) \leq r_{n+1} \leq r_n\ (1 - \frac{\delta_n}{2} + \frac{1}{4}\ \delta_n\ \delta_n^2)$$

De plus

(2.12) r_n est décroissante et minorée par $\frac{3p}{4}$

Remarque - Nous avons posé

(2.13) $$\delta_n = \delta\left(\frac{P}{2^n r_n}\right) \qquad \delta_n^2 = \delta^2\left(\frac{P}{2^n r_n}\right)$$

Démonstration :

$$r_n = \text{Inf}\ (\|x - c_{n-1}\| + J(x)) \geq \text{Inf}\ (\|x - c_o\| + J(x)) - \|c_o - c_{n-1}\|$$

$$r_n \geq r_1 - \|c_{n-1} - c_o\|$$

$$\|c_{n-1} - c_o\| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \|c_{k+1} - c_k\| = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{r_{k+1}}{2}\ \delta\left(\frac{P}{2^{k+1} r_{k+1}}\right)$$

Comme $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|c_{n-1}-c_o\| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{4} \frac{P}{2^{k+1}} < \frac{P}{4} \qquad \text{et}$$

$$r_n \geq P - \frac{P}{4} = \frac{3p}{4}$$

D'autre part

$$r_{n+1} = \inf_{x \in S} (\|x-c_n\| + J(x)) \leq \|x_n-c_n\| + J(x_n)$$

$$\leq r_n \left(1 + \frac{1}{4} \delta_n \delta_n^2\right) - \frac{r_n}{2} \delta_n \quad \text{d'après (2.8) et (2.10)}$$

$$r_{n+1} \leq r_n \left(1 - \frac{\delta_n}{2} + \frac{1}{4} \delta_n \delta_n^2\right)$$

Enfin $r_{n+1} \geq \inf (\|x-c_{n-1}\| + J(x)) - \|c_{n-1}-c_n\|$

$$\geq r_n - \frac{r_n \delta_n}{2}$$

———X———

2°) Convergence de la suite c_n

D'après (2.10), c_n est de Cauchy. Soit c sa limite

$$\|c-c_o\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k-c_{k+1}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{k+1} \delta_{k+1}}{2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{k+1}}{2} \frac{P}{2^{k+1} r_{k+1}} \frac{1}{2}$$

d'où $\|c-c_o\| \leq \frac{P}{4}$ qui implique (2.4).

3°) Début de l'étude de la convergence de x_n

Dans le cas où $\inf_n \|x_n-c_{n-1}\| = 0$ il existe une suite x_{n_p} extraite de x_n qui converge vers c. Comme J est minorée $\lim_p J(x_{n_p})$ est finie et il existe

une sous-suite extraite $x_{n_{p_j}}$ telle que $\lim_j J(x_{n_{p_j}}) = \underline{\lim}_p J(x_{n_p})$

On peut alors démontrer le théorème facilement.:

Notons encore x_n la suite $x_{n_{p_j}}$

$$J(c) \leq \lim_n [J(x_n) + \|x_n - c\|]$$

$$= \lim_n [J(x_n) + \|x_n - c_{n-1}\|]$$

$$= \lim_n r_n$$

$$= \lim_n \inf_x (\|x - c_{n-1}\| + J(x))$$

$$= \inf (\|x - c\| + J(x)) \quad \text{avec } s = c \in S$$

ce qui achève la démonstration du théorème dans ce cas.

Par contre si on a

$$\|x_{n+1} - c_n\| \geq \alpha > 0 \quad \forall n \tag{2.14}$$

la construction d'une sous-suite convergente de la suite x_n va demander quelques étapes intermédiaires.

4°) Construction des suites y_n et z_n

Pour $x \in S$ $x \neq d$ on pose

$$y(x,d) = x + \frac{x-d}{\|x-d\|} J(x)$$

$$y_n = y(x_n, c_{n-1}) = x_n + u_n J(x_n) \tag{2.15}$$

On a alors d'après (2.9) :

$$\|y_n - c_{n-1}\| = \|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n) \tag{2.16}$$

Comme $r_n > 0$ d'après le lemme 2, on a aussi d'après (2.8)

$$u_n = \frac{y_n - c_{n-1}}{\|y_n - c_{n-1}\|} \tag{2.17}$$

Remarquons que

$$\|x_{n+1} - c_{n-1}\| \geq \|x_{n+1} - c_n\| - \|c_n - c_{n-1}\| > 0$$

pour n assez grand grâce à (2.14) et (2.10). On pose alors

$$\bar{u}_{n+1} = \frac{x_{n+1} - c_{n-1}}{\|x_{n+1} - c_{n-1}\|} \tag{2.18}$$

On peut maintenant poser

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= c_{n-1} + \bar{u}_{n+1} \left[\|x_{n+1} - c_{n-1}\| + J(x_{n+1})\right] \\ &= x_{n+1} + \bar{u}_{n+1} J(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

On peut résumer la situation sur la figure suivante.

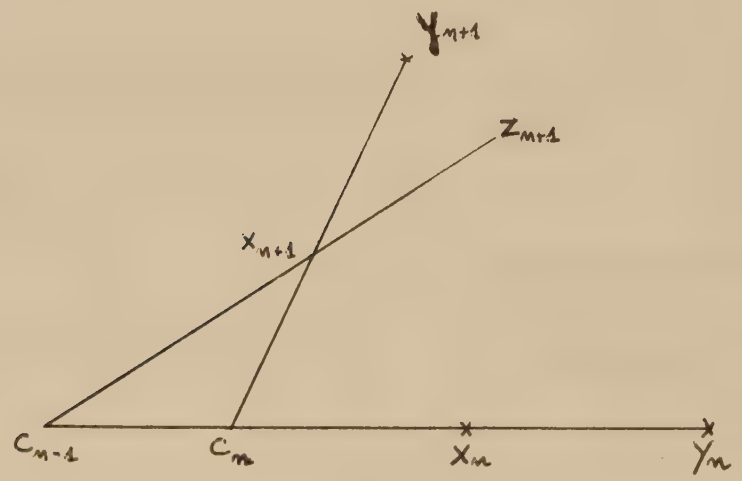

Figure 4

5°) Etude de la convergence de y_n

$$(2.20)\quad \frac{1}{r_n}\|y_{n+1}-y_n\| \le \left\| \frac{y_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} - \frac{z_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} \right\| + \left\| \frac{z_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} - u_n \right\| + \left\| u_n - \frac{y_n-c_{n-1}}{r_n} \right\|$$

Posons

$$\lambda_1^n = \left\| \frac{y_n-c_{n-1}}{r_n} - u_n \right\|$$

$$\lambda_2^n = \left\| \frac{z_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} - u_n \right\|$$

$$\lambda_3^n = \left\| \frac{y_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} - \frac{z_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} \right\|$$

Nous allons démontrer que $\lambda_i^n \le \frac{k_i}{2^n}$ $\quad i = 1, 2, 3$

5°/1) $\quad \lambda_1^n = \frac{\|y_n-c_{n-1}\|}{r_n} - 1$ $\qquad$ d'après (2.17)

$\le \frac{1}{4}\delta_n\delta_n^2$ $\qquad$ d'après (2.8)

Utilisant à nouveau $\delta(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2}$ et la croissance de δ

$\frac{1}{8}\delta_n^2$ et $\frac{1}{16}\delta_n$ sont aussi des majorants. Comme $\delta_n = \delta(\frac{P}{2^n r_n})$

d'après (2.12) on a

$$(2.21)\quad \lambda_1^n \le \frac{1}{32}\frac{4}{3p}\frac{1}{2^n} \le \frac{K_1}{2^n}$$

5°/2) Nous voulons majorer λ_2^n. Pour cela, nous utilisons le lemme 2. L'introduction de z_n est nécessaire car on ne peut appliquer ce lemme à $\frac{y_{n+1}-c_{n-1}}{r_n}$ et u_n. En effet, le premier vecteur ne vérifie pas (2.2).

Par contre, on peut l'appliquer à

$$x = \frac{z_{n+1}-c_{n-1}}{r_n} \qquad y = u_n \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{p}{2^n r_n}$$

(2.2) est alors vérifié d'après (2.19) et (2.7).

$$x - \frac{1}{2}\delta_n y = \frac{1}{r_n}\left[z_{n+1}-c_{n-1} - \frac{r_n}{2}\delta_n u_n\right] = \frac{z_{n-1}-c_n}{r_n} \quad \text{d'après (2.10)}$$

Si on avait $\|z_{n+1}-c_n\| > r_{n+1}\left(1 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2\right)$ on aurait aussi d'après (2.16) et (2.19), (voir figure 2) :

$$\|y_{n+1}-c_n\| = \|x_{n+1}-c_n\| + \|y_{n+1}-c_{n+1}\| \geq \|z_{n+1}-c_n\| \geq r_{n+1}\left(1 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2\right)$$

ce qui d'après (2.16) contredirait (2.8).

Donc

$$\|x - \frac{1}{2}\delta_n y\| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}\left(1 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2\right)$$

$$r_{n+1}\left(1 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2\right) \leq r_n\left(1 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2\right)\left(1 - \frac{\delta_n}{2} + \frac{1}{4}\delta_n\delta_n^2\right)$$

$$= r_n\left[1 - \frac{\delta_n}{2} + \frac{1}{4}\delta_n\delta_n^2 + \frac{1}{4}\delta_{n+1}\delta_{n+1}^2 - \frac{1}{8}\delta_n\delta_{n+1}^2\left(1 - \frac{1}{2}\delta_n^2\right)\right]$$

Pour n assez grand, le dernier terme est négatif.

De plus, on a toujours (2.11) :

$$r_{n+1} \geq r_n\left(1 - \frac{\delta_n}{2}\right)$$

et donc pour n assez grand $r_{n+1} \geq \frac{r_n}{2}$. Comme δ est monotone on a

$$\delta_{n+1} \geq \delta_n$$

Finalement

$$r_{n+1}\ (1 + \frac{1}{4}\ \delta_{n+1}\ \delta_{n+1}^2) \leq r_n\ (1 - \frac{\delta_n}{2} + \delta_n\ \delta_n^2)$$

et (2.3) est vérifié. On a donc d'après le lemme de la lunule

$$\lambda_2^n \leq \frac{P}{2^n r_n} \leq \frac{K_2}{2^n} \tag{2.22}$$

5°/3) Pour majorer λ_3^n on applique le lemme 1 avec

$$o = c_n \qquad b = c_{n-1} \qquad a = x_{n+1} \qquad k = c_{n-1} + \bar{u}_{n+1}$$

$m = c_n + u_{n+1}$. D'après (2.14) on a $\|a-o\| \geq \alpha$

et $\|a-b\| \geq \|a-o\| - \|b-o\| \geq \frac{\alpha}{2}$ pour n assez grand.

Les hypothèses du lemme 1 sont alors vérifiées et on en conclut

$$\|\mu_{n+1} - \bar{u}_{n+1} + c_n - c_{n-1}\| \leq K_4\ \|c_n - c_{n-1}\|$$

donc

$$\|\mu_{n+1} - \bar{u}_{n+1}\| \leq K_5\ \|c_n - c_{n-1}\| \tag{2.23}$$

Alors

$$\lambda_3^n = \frac{1}{r_n}\ \|y_{n+1} - x_{n+1} - (z_{n+1} - x_{n+1})\|$$

$$\lambda_3^n = \frac{J(x_{n+1})}{r_n}\ \|\mu_{n+1} - \bar{u}_{n+1}\| \tag{2.24}$$

D'après le lemme 2, r_n est minorée et convergente. D'après (2.8)

$\|x_n - c_{n-1}\| + J(x_n)$ est aussi convergente, donc $J(x_n)$ est borné par un nombr
M. (2.23) et (2.24) entraînent alors

$$\lambda_3^n \leq \frac{4}{3p}\ M\ K_5\ \|c_n - c_{n-1}\| \leq \frac{4}{3p}\ M\ K_5\ \frac{P}{2^n}\ \frac{1}{2}$$

$$\lambda_3^n \leq \frac{K_3}{2^n} \tag{2.25}$$

6°) Construction d'une sous-suite x_{n_p} convergente

Utilisant (2.20), (2.21), (2.22), (2.25), on voit que y_n est de Cauchy.

Soit y sa limite. D'après (2.8), (2.16) et (2.12)

$$\|y_n - c_{n-1}\| > \frac{3P}{4}$$

Donc $y \neq c$ et on peut poser

$$u = \frac{y-c}{\|y-c\|}$$

Comme J est minorée $\exists x_{n_p}$ tel que

$$\lim_p J(x_{n_p}) = \lim_n J(x_n) = \theta \tag{2.26}$$

Reécrivant (2.15) sous la forme

$$x_{n_p} = y_{n_p} - u_{n_p} J(x_{n_p})$$

et passant à la limite en p en utilisant (2.26) et la convergence de u_n vers u, on a la convergence de x_{n_p} vers

$$s = y - u\,\theta \quad \text{et } s \in S \text{ puisque S est fermé.}$$

7°) s réalise le minimum. C'est la même démonstration que pour le théorème 1 Chapitre 1. On a puisque J est s.c.i

$$\|s-c\| = \|y-c\| - \theta \leq \|y-c\| - J(s)$$

$$\|s-c\| + J(s) \leq \|y-c\| = \lim_n \|y_n - c_{n-1}\|$$

$$\leq \lim_n r_n \text{ d'après (2.8) et (2.16)}$$

$$\leq \lim_{n} \inf_{x} (\|x-c_{n-1}\| + J(x)) \text{ d'après (2.8)}$$

$$= \inf_{x} (\|x-c\| + J(x))$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

———————x———————

Remarque - Signalons un résultat du même type pour $\inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|^2)$ obtenu par Asplund [1] [2] comme celui du Chapitre 1 (Remarque suivant la proposition 4) et que l'on peut énoncer ainsi : Soit S un fermé d'un espace de Hilbert H et J une application s.c.s et minorée de S dans $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des $c \in E$ pour lesquels il existe un $s \in S$ unique tel que

$$J(s) + \|s-c\|^2 = \inf_{x \in S} (J(x) + \|x-c\|^2)$$

est un résiduel G_δ dense dans E.

Ce résultat généralise des résultats de MOREAU [1] sur les applications prox.

§ 3 - UN THEOREME DE CONVERGENCE DES SOLUTIONS DU PROBLEME PERTURBE

Soient E un Banach (UC), S une partie faiblement fermée de E et J une application de S dans $\mathbb{R}$ minorée et faiblement s.c.i. On suppose vérifiée une hypothèse de coercivité :

J tend vers l'infini à l'infini ou bien S est borné. On sait alors que

$$X = \{x \in S \; ; \; J(x) = \inf_{r \in S} J(r)\} \neq \emptyset$$

D'autre part, d'après le théorème 1, quels que soient $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ pour tout $\tilde{c} \in E$ il existe $s = s(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in S$ et $c = c(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in E$ tels que

$$(3.1) \qquad \|c-\tilde{c}\| \leq \varepsilon_2 \quad \text{et}$$

$$(3.2) \qquad J(s) + \varepsilon_1 \|s-c\| = \inf_{x\in S} (J(x) + \varepsilon_1 \|x-c\|)$$

On a alors le résultat de convergence suivant analogue à un théorème d'approximat pour les solutions d'une inéquation variationnelle(LIONS J.L. [2] p. 40)

Théorème 2

Sous les hypothèses précédentes, on peut extraire de l'ensemble des $s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ une suite convergente vers un $\bar{s} \in X$ (quand ε_1 et ε_2 tendent vers 0). Cet $\bar{s}$ vérifie

$$(3.3) \qquad \|\bar{s}-\tilde{c}\| = \inf_{x\in X} \|x-\tilde{c}\|$$

De plus

$$(3.4) \qquad \frac{J(s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) - J(\bar{s})}{\varepsilon_1} \to 0 \quad \text{quand } s(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \text{ tend vers } \bar{s} \text{ et}$$

$$(3.5) \qquad \frac{J(s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) - J(x)}{\|s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)-x\|} \to 0 \quad \text{quand } s(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \text{ tend vers } \bar{s} \text{ et } \forall x \in X$$

Démonstration : Sous les seules hypothèses du théorème 1, on a comme à la proposition 4 Chapitre 1

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0 \\ \varepsilon_2 \text{ borné}}} J(s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) = \inf_{x\in S} J(x)$$

L'hypothèse de coercivité et la réflexivité de E entraînent l'existence d'une suite extraite de $s(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ convergente faiblement vers un $\bar{s}$ (qui appartient à X). Dans la suite, s désignera un élément de cette suite convergente vers $\bar{s}$.

D'autre part, on déduit de (3.2)

$$(3.6)\qquad \frac{J(s)-J(x)}{\varepsilon_1} \leq \|x-c\| - \|s-c\| \qquad \forall x \in S$$

Si on prend $x \in X$, on a donc

$$\|s-c\| \leq \|x-c\| \qquad \forall x \in X$$

$$\|x-\tilde{c}\| = \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \|x-c\| \geq \underline{\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}}} \|s-c\| \geq \|\bar{s}-\tilde{c}\|$$

ce qui démontre (3.3).

Reprenons (3.6) avec $x = \bar{s}$

$$0 \leq \frac{J(s)-J(\bar{s})}{\varepsilon_1} \leq \|\bar{s}-c\| - \|s-c\|$$

La $\overline{\lim}$ du second membre est majorée par

$$\lim \|\bar{s}-c\| - \underline{\lim} \|s-c\| \leq 0$$

D'où (3.4). Alors

$$\overline{\lim} \|s-c\| = \overline{\lim} \frac{J(s)-J(\bar{s})}{\varepsilon_1} + \|s-c\| - \lim \frac{J(s)-J(\bar{s})}{\varepsilon_1}$$

$$\leq \|\bar{s}-\tilde{c}\| \leq \underline{\lim} \|s-c\|$$

Donc $\|s-c\|$ tend vers $\|\bar{s}-\tilde{c}\|$. L'(UC) de E entraîne alors la convergence fort de s-c vers $\bar{s}-\tilde{c}$, donc de s vers $\bar{s}$.

Enfin de (3.6) on tire

$$0 \leq J(s) - J(x) \leq \varepsilon_1 (\|x-c\| - \|s-c\|)$$

$$\leq \varepsilon_1 \|x-s\| \qquad \forall x \in X$$

ce qui démontre (3.5).

———— X

Remarque - Des conditions suffisantes pour assurer l'existence de $s \in S$ tels que

$$J(s) = \inf_{x \in X} J(x)$$

ont été abondamment étudiées. Voir par exemple VAINBERG [1].

CHAPITRE 3

oOo

APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EDP

(Cas où l'équation d'état est elliptique)

Ce chapitre contient, comme son titre l'indique, des applications du théorème 1 Chapitre 2 à des résultats d'existence vrais "en densité" pour des problèmes perturbés de contrôle optimal des systèmes gouvernés par des EDP dans le cas où l'équation d'état est elliptique. Les applications des théorèmes 1 et 2 du Chapitre 1, qui conduiraient à perturber par $-\varepsilon\|k-c\|$ au lieu de $\varepsilon\|k-c\|$, n'ont pas été développées. On remarquera que dans les applications les espaces fonctionnels employés sont toujours (UC).

L'exemple le plus typique des possibilités (et des limites !) du théorème 1 Chapitre 2 est le problème modèle développé au point 1.2.1.

PLAN DU CHAPITRE 3

1 - Equation d'état linéaire p. 1

1.1 - Contrôle linéaire p. 1

1.1.1 - Cadre général p. 1

1.1.2 - Un exemple variationnel général p. 2

1.1.3 - Un exemple non variationnel avec contrôle frontière p. 3

1.2 - Contrôle dans les coefficients p. 4

1.2.1 - Le "problème modèle" p. 4

1.2.2 - Un deuxième exemple p. 8

1.2.3 - Une variante : observation frontière p. 10

2 - Equation d'état non linéaire p. 11

2.1 - Un exemple avec contrôle et observation distribués p. 11

2.2 - Un exemple avec contrôle dans les coefficients. p. 14

1. EQUATION D'ETAT LINEAIRE

1.1 - Contrôle linéaire

1.1.1 - Cadre général

Soit $\mathcal{U}$ un espace de Banach uniformément convexe (l'espace des contrôles) et $\mathcal{U}_{ad}$ une partie fermée de $\mathcal{U}$ non nécessairement convexe (l'ensemble des contrôles admissibles).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Banach (l'espace des observations). On suppose que l'état y du système à contrôler est relié au contrôle par

(1.1) $$y = Gu + a$$

où a est une constante dans un espace convenable et

(1.2) $$G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

Le théorème 1 Chapitre 2 donne alors immédiatement la

Proposition 1

$\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des $w \in \mathcal{U}$ tels qu'il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ qui réalise le minimum dans

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \{ \|y(u) - z_d\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \|u - w\|_{\mathcal{U}} \}$$

est dense dans $\mathcal{U}$.

Remarque - Il suffit si $\mathcal{H}$ est réflexif (resp. si $\mathcal{H}$ est le dual d'un espace de Banach) de supposer G continue de $\mathcal{U}$ fort dans $\mathcal{H}$ faible (resp. $\mathcal{H}$ faible étoile). En effet, dans ce cas, $h \to \|h\|_{\mathcal{H}}$ est continue de $\mathcal{H}$ faible (resp. faible étoile) dans $\mathbb{R}$.

1.1.2 - Un exemple variationnel général

Soient V et H deux espaces de Hilbert ; V dense dans H ; l'injection de V dans H étant continue. Alors H peut être identifié à un sous-espace dense de V' dual de V et tel que l'injection de H dans V' soit continue

$$V \subset H \subset V'$$

Soient $A \in \mathcal{L}(V,V')$, $B \in \mathcal{L}(U,V')$ et $C \in \mathcal{L}(V,\mathcal{H})$.
y est la solution du problème

(1.3) $$Ay = f + Bu$$

Il découle immédiatement d'un résultat de LIONS [1] que y vérifie alors (1.1) avec un G vérifiant (1.2).

On a donc le résultat de la proposition 1.

On peut faire rentrer dans ce cadre quantité d'exemples analogues à ceux de LIONS [1], mais avec $\mathcal{U}_{ad}$ non convexe : problème de Dirichlet, de Neumann, d'ordre supérieur à 2, contrôle frontière ou distribué, observation frontière ou distribuée, etc ...

Remarque - On peut aussi supposer C non linéaire et continue de V fort dans $\mathcal{H}$ faible et considérer en plus une application s.c.i Λ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors trivialement la

Proposition 1'

Pour presque tout $w \in \mathcal{U}$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ qui réalise le minimum de

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \{ ||Cy(u) - z_d||_{\mathcal{H}} + \Lambda(u) + \varepsilon ||u-w||_{\mathcal{U}} \}$$

où y est solution du problème (1.3).

Remarque - Même si y ($\mathcal{U}_{ad}$) est fermé -ce qui n'est pas fréquent- on ne peut, en général, appliquer le théorème 1 car Cy ($\mathcal{U}_{ad}$) n'est pas fermé.

Dans le cas C = I, $\mathcal{H}$ = V, en supposant de plus que $\mathcal{U} = \mathcal{V}'$ dual d'un ensemble de Banach et que $\mathcal{U}_{ad}$ est un borné de $\mathcal{U}$ fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$, on peut utiliser le théorème E Chapitre 2 et énoncer la

Proposition 1"

Pour presque tout $z_d \in V$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant le minimum dans

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \|y(u) - z_d\|_V$$

Ce résultat est plus agréable que celui de la proposition mais nécessite des hypothèses beaucoup plus fortes.

1.1.3 - Un exemple non variationnel

On considère une "équation d'état" du type

$$(1.4) \qquad \begin{cases} Ay = f & \text{dans } \Omega \\ By = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec des hypothèses convenables sur les opérateurs linéaires A et B assurant l'existence et l'unicité de la solution de la continuité des solutions par rapport aux données (voir LIONS et MAGENES [1]). On a alors

$$y(u) = y(0) + Gu$$

avec G linéaire continue.

Exemple : $\begin{cases} -\Delta y + y = f \in L^2(\Omega) \\ y = u \in L^2(\partial\Omega) \end{cases}$

Alors pour presque tout $w \in L^2(\partial\Omega)$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ partie fermée de $L^2(\partial\Omega)$ réalisant le minimum de

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \|y(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|u - w\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

———————×

1.2 - Contrôle dans les coefficients

Nous donnons deux exemples tirés eux aussi du livre de contrôle de LIONS [1].

1.2.1 - Le "problème modèle"

Soit y(u) la solution du problème (elle existe et est unique, cf. LIONS [1]).

$$(1.5) \qquad \begin{cases} -\nabla\ (u\ \nabla\ y) = f & f \in L^2(\Omega) \\ y \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

L'ensemble des contrôles est un fermé $\mathcal{U}_{ad}$ de

$$\mathcal{U} = \{u \in L^p(\Omega),\ 0 < \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad pp\}$$

$1 < p < \infty$ pour avoir l'uniforme convexité de l'espace (voir CLARKSON [1]).

Lemme 1

L'application $u \to y(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ fort dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

Démonstration : Soit $u_m \to u$ dans L^p fort. Posons $y_m = y(u_m)$.

Prenant (1.5) sous forme variationnelle, on a

$$\int_\Omega u_m \nabla y_m^2 = \int_\Omega f\ y_m \leq \|f\|_{L^2} \|y_m\|_{L^2}$$

D'après la définition de $\mathcal{U}$ et l'inégalité de Poincaré

$$\alpha \int_\Omega \nabla y_m^2 \leq \int_\Omega u_m \nabla y_m^2 \leq c \|f\|_{L^2} \|y_m\|_{H_0^1}$$

D'où

$$\|y_m\|_{H_0^1} \leq K \|f\|_{L^2}$$

La suite y_m est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut en extraire une sous suite y_{m_j} convergente dans H_0^1 faible de limite y. Pour démontrer le lemme, il faut montrer d'abord que y = y(u), ensuite que la suite y_m toute entière converge vers y.

Pour montrer que y = y(u), il suffit de passer à la limite dans

$$\int u_{m_j} \nabla y_{m_j} \nabla z = \int f\ z \qquad \forall z \in H_0^1 \tag{1.6}$$

Par hypothèse ∇y_m tend vers ∇y dans L^2 faible. Montrons qu'il existe une sous-suite telle que $u_{m_{j_k}} \nabla z$ tend vers $u \nabla z$ dans L^2 fort.

Comme u_{m_j} tend vers u dans L^p fort, on peut en extraire une sous-suite $u_{m_{j_k}}$ convergente vers u presque partout. D'après la définition de $\mathcal{U}_{ad}$

$$|u_{m_{j_k}}(x) - u(x)|\ |\nabla z(x)| \leq 2\beta\ |\nabla z(x)| \in L^2$$

D'après le théorème de Lebesgue $(u_{m_{j_k}} - u) \nabla z$ converge alors vers 0 dans L^2 fort.

Passant à la limite k tendant vers l'infini dans (1.6) écrit pour m_{j_k}, on a

$$\int u \nabla y \nabla z = \int f z \qquad \forall z \in H_0^1$$

donc $y = y(u)$

A priori, on ne peut passer à la limite sur m_j, mais ici on peut en fait passer à la limite sur m. En effet, s'il existait une sous-suite y_{m_λ} de la suite y_m qui n'ait pas y(u) comme point adhérent on pourrait, par le raisonnement précédent, en extraire une sous-suite convergente vers y(u).

———X

On a en fait, ici, un résultat plus fort :

Lemme 2

L'application $u \to y(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ fort dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Démonstration : On a

$$X_m = \int u_m (\nabla y_m - \nabla y)^2 \geq \alpha \int (\nabla y_m - \nabla y)^2 \geq 0$$

Développons

$$X_m = \int u_m \nabla y_m^2 - 2 \int u_m \nabla y_m \nabla y + \int u_m \nabla y^2$$

$\int u_m \nabla y_m^2 = \int f y_m$ tend vers $\int f y$ d'après le lemme 7.1 et compacité de l'injection de H_0^1 faible dans L^2 fort.

$- 2 \int u_m \nabla y_m \nabla y$ tend vers $- 2 \int u \nabla y^2$ pour la même raison.

Par hypothèse $u_m \in \mathcal{U}$ donc est borné dans L^∞. Il existe donc une sous-suite u_{m_j} convergente dans L^∞ muni de la topologie faible étoile $\sigma(L^\infty, L^1)$. Comme u_m converge vers u dans L^p fort en fait la sous-suite

u_{m_j} est la suite toute entière et la limite $\sigma(L^\infty, L^1)$ est aussi u.

Alors $\int u_m \nabla y^2$ tend vers $\int u \nabla y^2$ et X_m tend vers 0.

Le théorème 1 Chapitre 2 et le lemme 2 permettent alors d'affirmer :

Proposition 2

Pour presque tout c dans $L_2(\Omega)$ et pour tout $\nu > 0$ il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant l'inf de

$$\|y(u) - z_d\|_{H_0^1(\Omega)} + \nu \|u-c\|_{L^p(\Omega)}$$

où y(u) est solutions du problème (1.5).

Le théorème 1 Chapitre 2 et le lemme 1 donnent :

Proposition 2'

Pour presque tout $c \in L_2(\Omega)$ et pour tout $\nu > 0$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant l'inf de

$$\|y(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)} + \nu \|u-c\|_{L^2(\Omega)}$$

où y(u) est solution du problème (1.5).

———X———

Remarque - Comme $\mathcal{U}$ est borné, on a les mêmes résultats d'existence pour le sup. (théorème 1 Chapitre 1).

Remarque - $y(\mathcal{U}_{ad})$ n'est pas fermé dans $L^2(\Omega)$. On ne peut donc appliquer le théorème 1 pour conclure à l'existence d'un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$\|y(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \|y(v) - z_d\|$$

On peut d'ailleurs pontrer que pour $\mathcal{U}_{ad} \subset L^\infty(\Omega)$, en général cet inf. n'est pas atteint (voir Murat [1] pour un contre-exemple).

Remarque - Il est, en fait, inutile de faire appel au lemme 2 pour démontrer la proposition 2. En effet, la continuité de $L^p(\Omega)$ fort dans $H_0^1(\Omega)$ faible de l'application $u \to y(u)$ assure la s.c.i de l'application $u \to \|y(u) - z_d\|_{H_0^1(\Omega}$ de $L^p(\Omega)$ fort dans $\mathbb{R}$.

1.2.2 - Un deuxième exemple

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un fermé de

$$\mathcal{U}_+ = \{u \in L^p(\Omega) \; ; \; u \geq 0 \text{ p.p}\} \text{ avec } 1 < p < \infty$$

On considère le problème

$$(1.7) \qquad \begin{cases} Ay + u\,y = f & \text{dans } \Omega \\ y|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

où par exemple $f \in L^2(\Omega)$ et A est donné par :

$$(1.8) \qquad \begin{cases} Ay = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} y\right) + a_o\, y \\ a_{ij}, a_o \in L^\infty(\Omega) \qquad a_o(x) \geq \alpha \text{ p.p et} \\ \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2 \qquad \text{p.p.}, \qquad \alpha > 0 \end{cases}$$

Lemme 3

L'application $u \to y(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ fort dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

Démonstration : Soit u_m une suite convergeant vers u dans $L^p(\Omega)$ fort. Posant
$a(y,z) = (Ay,z) \qquad \forall y,\ z \in H_0^1(\Omega)$

on a (1.7) sous forme variationnelle.

$$(1.9) \qquad a(y,z) + (u\ y,z) = (f,z) \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

où (.,.) est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Posant $y_m = y(u_m)$ on tire de (1.7) puisque $u \in \mathcal{U}^+$

$$\alpha \|y_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq (f,y_m) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_m\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré y_m est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ donc il existe une sous-suite, notée encore y_m, convergente dans $H_0^1(\Omega)$ faible. Soit y sa limite

$$a(y_m,z) + (u_m\ y_m,z) = (f,z) \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

$a(y_m,z)$ tend vers $a(y,z)$. Reste à montrer que $\int_\Omega u_m\ y_m\ z\ dx$ tend vers $\int_\Omega u\ y\ z\ dx$. Or, y_m tendant vers y dans $L^2(\Omega)$ fort, il suffit de montrer que $u_m\ z$ tend vers $u\ z$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Or, on peut extraire de u_m une sous-suite convergente p.p donc bornée p.p. Alors le théorème de Lebesgue permet de conclure car

$$|u_m\ z\ \lambda - u\ z\ \lambda| \leq K\ |z\ \lambda| \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega) \qquad \forall \lambda \in L^2(\Omega)$$
$$\text{p.p dans } \Omega$$

On a donc $y = y(u)$ et le même raisonnement qu'au lemme 1 prouve que c'est y_m toute entière qui converge vers $y(u)$.

———X———

On a alors

Proposition 3

Pour presque tout $w \in L^p(\Omega)$ il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant l'inf de

$$\|y(u)-z_d\|_{H_0^1(\Omega) \text{ ou } L^2(\Omega)} + \nu \|u-w\|_{L^p(\Omega)}$$

où y(u) est la solution du problème (1.7).

1.2.3 - Une variante : Observation frontière

Reprenons l'exemple précédent en supposant A assez régulier pour que $y(u) \in H^2(\Omega)$ et que l'application $u \to y(u)$ soit continue de $L^p(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.

Alors $\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u) \in L^2(\Gamma)$ et l'application $y \to \frac{\partial y}{\partial \nu_A}$ est continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

On a donc :

Proposition 3'

Pour presque tout $w \in L^p(\Omega)$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant l'inf de

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u) - z_d \right\|_{L^2(\Gamma)} + \nu \|u-w\|_{L^p(\Omega)}$$

où y(u) est la solution du problème (1.7).

2. EQUATION D'ETAT NON LINEAIRE

2.1 - Un exemple avec contrôle et observation distribuée

Considérons le problème

$$(2.1) \qquad \begin{cases} -\Delta y + y^3 = f + u \\ y \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \end{cases}$$

où $f \in L^{4/3}(\Omega) = L^4(\Omega)'$

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un ensemble fermé de $L^{4/3}(\Omega)$

Pour une démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de (1.7 voir par exemple TEMAM R. [1].

On considère $J(u) = \|y(u) - z_d\|_{L^4(\Omega)}$

Lemme 4

L'application $u \to y(u)$ est continue de $L^{4/3}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et $L^4(\Omega)$ faible.

Démonstration : Soit u_m une suite tendant vers u. Posons $y_m = y(u_m)$
(2.1) donne sous forme variationnelle

$$\int_\Omega \nabla y_m^2 + \int_\Omega y_m^4 = \int_\Omega (f + u_m)\, y_m \leq \|f + u_m\|_{L^{4/3}} \|y_m\|_{L^4}$$

Donc

$$\|y_m\|_{L^4}^4 \leq \|f + u_m\|_{L^{4/3}} \|y_m\|_{L^4} \qquad \text{et}$$

$$\|y_m\|_{H_0^1}^2 \leq \|f + u_m\|_{L^{4/3}} \|y_m\|_{L^4}$$

soit encore

$$\|y_m\|_{L^4} \leq \|f + u_m\|_{L^{4/3}}^{1/3} \qquad \text{et}$$

$$\|y_m\|_{H_0^1} \leq \|f + u_m\|_{L^{4/3}}^{2/3}$$

Donc y_m appartient à un borné de $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$

Comme $\|y_m^3\|_{L^{4/3}} = \|y_m\|_{L^4}^3$

y_m^3 appartient à un borné de $L^{4/3}(\Omega)$.

On peut donc par extractions successives obtenir une suite notée encore y_m convergente dans $H_0^1(\Omega)$ faible dans $L^4(\Omega)$ faible et telle que y_m^3 converge dans $L^{4/3}(\Omega)$ faible.

Il est immédiat que la limite y de y_m est la même dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $L^4(\Omega)$ faible. Il ne l'est pas que la limite de y_m^3 dans $L^{4/3}(\Omega)$ faible soit y^3. Mais y_m converge vers y dans $L^2(\Omega)$ fort car l'injection de $H_0^1(\Omega)$ faible dans $L^2(\Omega)$ est compacte. On peut alors en extraire une sous-suite qui converge vers y p.p. Alors y_m^3 converge vers y^3 p.p. Il résulte alors d'un lemme de LIONS ([2] p. 13) que y_m^3 converge vers y^3 dans $L^{4/3}(\Omega)$ faible.
Prenons la forme variationnelle de (2.1).

$$(2.2) \qquad \int \nabla y_m \nabla z + y_m^3 z = f z + u_m z$$

On peut maintenant passer à la limite dans cette équation, ce qui prouve que $y = y(u)$.

Le même raisonnement qu'au lemme 1 montre alors que c'est la suite y_m toute entière qui converge vers $y(u)$.

———X———

On a les inclusions (avec injection continue)

$$L^4(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^{4/3}(\Omega)$$

Ajoutant à cela la s.c.i. de l'application

$v \to \|v\|$ d'un Banach muni de sa topologie faible dans $\mathbb{R}$ on en déduit que les trois applications

$$u \to \|y(u) - z_d\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$u \to \|y(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)}$$

$$u \to \|y(u) - z_d\|_{L^4(\Omega)}$$

sont s.c.i. de $L^{4/3}(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque : En fait, la deuxième est continue à cause de la compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ faible dans $L^2(\Omega)$. On pourrait aussi montrer la continuité de la première comme au lemme 2.

———X———

Le théorème 1 Chapitre 2 permet alors d'énoncer la

Proposition 4

Pour presque tout $w \in L^{4/3}(\Omega)$ [resp $L^2(\Omega)$], il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ fermé de $L^{4/3}(\Omega)$ [resp $L^2(\Omega)$] réalisant l'inf de

$$\|y(u) - z_d\|_W + \nu \|u - w\|_{L^{4/3}(\Omega)} \quad [\text{resp } L^2(\Omega)]$$

où $\nu > 0$; z_d est donné dans w ; W est soit $H_0^1(\Omega)$, soit $L^2(\Omega)$, soit $L^4(\Omega)$; $y(u)$ est la solution du problème (2.1).

———X———

2.2 - Un exemple avec contrôle dans les coefficients

On considère la forme sur $W^{1,p}(\Omega)$ $(2 < p < \infty)$

$$a(y,z) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u \mid D_i y|^{p-2} D_i y \, D_i z \, dx$$

On prend comme ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ partie fermée de

$$\mathcal{U} = \{u \in L^{\sigma}(\Omega) \; ; \; 0 < \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad p.p\} \tag{2.3}$$

$$1 < \sigma < \infty$$

Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega) = [W_0^{1,p}(\Omega)]'$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

On sait (cf. LIONS [2] p. 171) qu'alors il existe une solution unique au problème.

$$a(y,z) = (f,z) \qquad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.4}$$

où $(.,.)$ est la dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$

(2.4) est la forme variationnelle du problème de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\sum D_i (u \mid D_i y)^{p-2} D_i y) = f & \text{dans } \Omega \\ y_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Lemme 5

L'application $u \to y(u)$ est continue de $L^{\sigma}(\Omega)$ fort dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible.

Démonstration : Soit u_m une suite convergente vers u dans $L^{\sigma}(\Omega)$ fort. Pos $y_m = y(u_m)$ et prenons $y = z = y_m$ dans (2.4).

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_m \, |D_i y_m|^{p-2} D_i y_m^2 = (f, y_m)$$

Le premier membre est minoré par $\alpha |y_m|^2_{W_0^1(\Omega)}$;

le second est majoré par $\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|y_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$

Donc y_m est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et on peut en extrair une sous-suite, notée encore y_m, convergente dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible. Soit y sa limite.

Nous allons montrer que y = y (u).

$$X_m(z) = \sum_i \int_\Omega u_m \left(|D_i\, y_m|^{p-2} D_i\, y_m - |D_i\, z|^{p-2} D_i\, z\right)(D_i\, y_m - D_i\, z)\, dx$$

En raison de la monotonie de l'opérateur associé à la forme a(y,z) $X_m(z)$ est positif ou nul.

Posons

$$X_m^1(z) = \sum_i \int_\Omega u_m\, |D_i\, y_m|^{p-2} (D_i\, y_m)^2\, dx$$

$$X_m^2(z) = \sum_i \int_\Omega u_m\, |D_i\, y_m|^{p-2} D_i\, y_m\, D_i\, z\, dx$$

$$X_m^3(z) = \sum_i \int_\Omega u_m\, |D_i\, z|^{p-2} D_i\, z\, D_i\, y_m\, dx$$

$$X_m^4(z) = \sum_i \int_\Omega u_m\, |D_i\, z|^{p-2} (D_i\, z)^2\, dx$$

On a

$X_m^1(z) = (f, y_m)$ donc $X_m^1(z)$ tend vers $X^1(z) = (f,y)$

$X_m^2(z) = (f,z)$ d'après (2.4).

Pour $X_m^3(z)$ on sait que $D_i\, y_m$ tend vers $D_i\, y$ dans $L^p(\Omega)$ faible, donc il suffit de montrer que $u_m |D_i\, z|^{p-2} D_i\, z$ converge vers $u|D_i\, z|^{p-2} D_i\, z$ dans $L^{p'}(\Omega)$ fort. Ce résultat est vrai pour une sous-suite par un raisonnement analogue à celui du lemme 1.

En effet u_m convergeant vers u dans $L^\sigma(\Omega)$ fort, on peut en extraire une sous-suite convergente vers u p.p. Notons encore u_m cette sous-suite. D'autre part :

$$|u_m(x) - u(x)|\ |D_i\ z(x)|^{p-1} \leq 2\ \beta\ |D_i\ z(x)|^{p-1}$$

Comme $(|D_i\ z|^{p-1})^{p'} = |D_i\ z|^p$ le théorème de Lebesgue permet de conclure à la convergence de u_m vers u dans $L^{p'}(\Omega)$ fort. Alors $X_m^3(z)$ tend vers $X^3(z) = a(z,y)$.

Pour $X_m^4(z)$, on raisonne de la même manière. On en conclut que (une sous-suite extraite de) $X_m^4(z)$ converge vers $X^4(z) = a(z,z)$.

Donc $X_m(z)$ converge vers

$$X(z) = (f,y) - (f,z) - a(z,y) + a(z,z)$$
$$= (f,y-z) + a(z,z-y) \geq 0$$

et ceci pour tout $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prenons $z = y - \lambda\ \psi$ avec $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$(f,\psi) - a(y - \lambda\ \psi,\psi) \geq 0 \qquad \forall\ \psi$$

On sait aussi que l'opérateur A défini par a est hémicontinu ; on peut donc passer à la limite $\lambda \to 0$

$$(f,\psi) - a(y,\psi) \geq 0 \qquad \forall\ \psi$$

Changeant ψ en $-\psi$, on a

$$(f,\psi) = a(y,\psi)$$

Donc $y = y(u)$

Enfin, c'est toute la suite y_m, et non seulement une sous-suite, qui converge vers y(u) comme on le voit en reprenant le raisonnement de la fin du lemme 1.

On a alors les

Proposition 5

Pour presque tout $w \in L^\sigma(\Omega)$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ fermé de $\mathcal{U}$ (défini par 2.3) réalisant l'inf de

$$\|y(u) - z_d\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \nu \|\mu - w\|_{L^\sigma(\Omega)}$$

Proposition 5'

Pour presque tout $w \in L^\sigma(\Omega)$, il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant l'inf de

$$\|y(u) - z_d\|_{L^p(\Omega)} + \nu \|\mu - w\|_{L^\sigma(\Omega)}$$

Remarque - Dans ces deux énoncés, $\nu > 0$ et $y(u)$ est la solution du problème (2.5).

Démonstration : Pour la proposition 5', cela résulte du lemme 5 et de la continuité de l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible dans $L^p(\Omega)$ fort. Alors $u \to J(u) = \|y(u) - z_d\|_{L^p(\Omega)}$ est continue sur $L^\sigma(\Omega)$ et on applique le théorème 1 Chapitre 2.

Pour la proposition 5, cela résulte de la s.c.i. de l'application $u \to \|\mu\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ faible dans $\mathbb{R}$. Alors

$u \to J(u) = \|y(u) - z_d\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est s.c.i. sur $L^\sigma(\Omega)$ fort

et on applique le théorème 1 Chapitre 2.

Remarque - Comme $\mathcal{U}_{ad}$ est borné, on a les mêmes résultats pour le sup avec le théorème 1 Chapitre 2.

———X———

CHAPITRE 4

oOo

APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL

DES SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EDP

(Cas où l'équation d'état est une inéquation ou une équation d'évolution)

Plutôt que de reprendre dans ce cadre les analogues paraboliques ou hyperboliques de tous les exemples du Chapitre 3 (par exemple

$$y' - \nabla(u\nabla y) = f$$

avec $u \in \mathcal{U}_{ad}$ fermé $\subset \mathcal{U} = \{u \in L^\sigma(Q) \; ; \; 0 < \alpha \leq u < \beta \;\; p.p\}$

et $J(u) = \|y(u) - z_d\|_{L^2(Q)}$

ou encore :

$$y' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = f$$

avec le même $\mathcal{U}_{ad}$ que ci-dessus

et $J(u) = \|y(u) - z_d\|_{L^p(Q)}$), nous avons préféré traiter trois exemples utilisant des techniques assez différentes : les inéquations variationnelles au § 1 ; un exemple de contrôle frontière pour l'équation de Navier Stockes au § 2 et enfin au § 3 un exemple hyperbolique avec contrôle dans le coefficient de la dérivée première.

PLAN DU CHAPITRE 4

1 - L'"équation" d'état est une inéquation. p. 1

2 - Un exemple de contrôle frontière pour l'équation de Navier Stockes. p. 6

3 - Un exemple hyperbolique ($y''-\Delta y+vy' = f$). p. 11

1. L'"EQUATION" D'ETAT EST UNE INEQUATION

Nous nous plaçons dans le cadre utilisé par LIONS [2] § 2.8 et dû à BREZIS [1] [2], c'est-à-dire :

V est un espace de Banach séparable et réflexif de dual V'. K est une partie convexe fermée de V. A : K → V' l'opérateur A est pseudo-monotone (**).

On suppose soit K borné, soit A coercif au sens

$$(1.1) \qquad \exists v_o \in K \text{ tel que } \lim_{\substack{\|v\| \to \infty \\ v \in K}} \frac{(Av, v-v_o)}{\|v\|} = +\infty$$

Soit $f \in V'$.

On sait que dans ces conditions, il existe un $u \in K$ tel que

$$(1.2) \qquad (Au, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in K$$

Nous supposerons, de plus, que A est tel que la solution u en question est unique (*).

Proposition 1

L'application $f \to u(f)$ est continue de toute partie bornée de V' fort dans V faible. De plus, $f \to Au(f)$ est continue de V' fort dans V' faible étoile.

Démonstration : La topologie sur les parties bornées de V' étant métrisable, on peut considérer une suite. Soit f_n une suite convergente vers f et $v_n = u(f_n)$. Si K est borné $\|u_n\|$ est borné. Si K n'est pas borné mais vérifie (1.1), $\|u_n\|$ est aussi borné sinon

$\|f_n\|_{V'} \dfrac{\|u_n - v_o\|_V}{\|u_n\|_V}$ tendrait vers l'infini pour une suite extraite de u_n.

(*) c'est le cas si A est strictement monotone par exemple

(**) Définition au Chapitre 0.

Dans tous les cas, on peut donc extraire une sous suite notée encore u_n qui converge faiblement dans V vers une limite $u \in K$.

Comme f_n converge dans V' fort

$$(1.3) \qquad (f_n, v-u_n) \to (f, v-u) \qquad \forall v \in K$$

D'autre part

$$(1.4) \qquad (Au_n, u_n-u) \leq (f_n, u_n-u)$$

donc

$$\overline{\lim_n} (Au_n, u_n-u) \leq 0$$

et comme A est pseudo monotone

$$(1.5) \qquad \underline{\lim_n} (Au_n, u_n-v) \geq (Au, u-v) \qquad \forall v \in K$$

Prenons la limite inférieure dans (1.4). On a d'après (1.3) et (1.5)

$$(f, u-v) = \lim_n (f_n, u_n-v) \geq \underline{\lim_n} (Au_n, u_n-v) \geq (Au, u-v)$$

Donc $u = u(f)$ et le raisonnement habituel montre que c'est la suite u_n toute entière qui converge vers u.

Pour la continuité de $f \to Au(f)$, on utilise le fait qu'un opérateur pseudo monotone a la propriété M(*).

Comme A est borné, Au_n est borné dans V' et on peut extraire une sous suite notée encore Au_n qui converge dans V' faible vers un χ. Et on a :

$$\lim \sup (Au_n, u_n) \leq \lim \sup (Au_n, v) - (f_n, v-u_n) \qquad \forall v \in K$$

Prenant $v = u$

$$\lim \sup (Au_n, u_n) \leq (\chi, u)$$

Donc $\chi = Au$ d'après la propriété M et c'est toute la suite qui converg

(*) Définition au Chapitre 0.

Remarque - Dans le cas où A est linéaire et coercif au sens usuel :

$$(Au - Av, u-v) \geq \alpha \, \|u-v\|^2 \qquad \alpha > 0 \quad \forall u,v \in V$$

on sait que $f \to u(f)$ est continue fortement. Elle est même lipchitzienne. On a en effet

$$(Au_n - Au, u_n - u) \leq (f_n - f, u_n - u)$$

d'où

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f_n - f\|_{V'}$$

———X———

. On déduit immédiatement de la proposition 1 et du théorème 1 Chapitre 2 des résultats d'existence pour des problèmes de contrôle :

Proposition 2

On suppose V'(UC). Soit $\mathcal{F}_{ad}$ une partie fermée de V'. Alors $\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des $g \in V'$ tels qu'il existe un $f \in \mathcal{F}_{ad}$ tel que

$$\|u(f) - u_d\|_V + \varepsilon \|f-g\|_{V'}$$

$$= \inf_{h \in \mathcal{F}_{ad}} (\|u(h) - u_d\|_V + \varepsilon \|h-g\|_{V'})$$

est dense dans V' (*).

———X———

Remarque - On a le même énoncé pour

$$\|Au(f) - v_d\|_{V'} + \varepsilon \|f-g\|_{V'}$$

———X———

(*) u(f) est la solution de (1.2).

On peut donc à l'aide de la proposition précédente contrôler à l'aide du "second membre" des systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles elliptiques.

1er exemple : $V = H^1(\Omega)$

$K = \{v \geq 0 \quad p.p \text{ sur } \Gamma\}$

$y(u)$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f + u \\ y \geq 0 \text{ sur } \Gamma \ ; \ \frac{\partial y}{\partial n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \\ y \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un fermé quelconque de $L^2(\Omega)$. Alors l'ensemble des $w \in L^2(\Omega)$ pour lesquels il existe au moins un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ minimisant

$$\| y(u) - z_d \|_{H^1(\Omega) \text{ ou } L^2(\Omega)} + \varepsilon \| u-w \|_{L^2(\Omega)}$$

est dense dans $L^2(\Omega)$.

2ème exemple : $V = W^{1,p}(\Omega)$

$$Ay = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + a_o |y|^{p-2} y$$

$a_o \in L^\infty(\Omega) \quad a_o(x) \geq \alpha_o > 0$

Même convexe K qu'à l'exemple 1.

$y(u)$ est la solution du problème.

$$\begin{cases} Ay = f + u \\ y \geq 0 \text{ sur } \Gamma \quad \omega = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \geq 0 \text{ sur } \Gamma. \\ \omega y = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On a alors le même résultat qu'à l'exemple 1 pour (par exemple) la fonctionnelle

$$\|y(u) - z_d\|_{W^{1,p}(\Omega) \text{ ou } L^p(\Omega)} + \varepsilon \|u-w\|_{L^p(\Omega)}$$

en prenant pour $\mathcal{U}_{ad}$ un fermé quelconque de $L^p(\Omega)$.

Remarque - On peut sans difficulté établir des résultats analogues dans le cas des inéquations d'évolution dans le cadre où les théorèmes d'existence et d'unicité de BREZIS [2] sont valables.

2. CONTROLE FRONTIERE POUR LES EQUATIONS DE NAVIER STOCKES

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, ν un nombre positif

$T > 0$, $Q = \Omega \times]0,T[$

On considère le problème de Navier Stockes sous la forme : trouver y et grad p tels que :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \qquad p \in \mathcal{D}'(Q) \\ y' - \nu \Delta y + \sum_{i=1}^{2} y_i D_i y = f - \text{grad } p \\ y(0) = u \end{cases}$$

où $\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \; ; \; \text{div } v = 0\}$

V = adhérence de $\mathcal{V}$ dans $H^1(\Omega)^2$

$= \{v \in H_0^1(\Omega)^2, \; \text{div } v = 0\}$ (*)

H = adhérence de $\mathcal{V}$ dans $L^2(\Omega)^2$

Ce problème admet (*) la formulation variationnelle équivalente :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \qquad p \in \mathcal{D}'(Q) \\ (y',z) + \nu a(y,z) + b(y,y,z) = (f,z) \qquad \forall v \in V \\ y(0) = u \end{cases}$$

où $a(y,z) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \, dx$

$$b(u,v,w) = \sum_{k,i=1}^{2} \int_\Omega u_k D_k v_i w_i \, dx$$

(*) Voir LIONS [2] p. 65 et suivantes.

Dans tous les cas, f est donnée dans $L^2(0,T,V')$ (**) et u qui sera le contrôle appartient à $\mathcal{U}_{ad}$ ensemble fermé non nécessairement convexe de H.

On sait que dans ces conditions le problème (2.1) (ou (2.2)) admet une solution unique $y(u) \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \cap C(0,T,H)$ (*) telle que $\frac{dy}{dt}(u) \in L^2(0,T,V')$.

Le résultat de continuité suivant est valable :

Proposition 1

L'application $u \to y(u)$ est continue de H fort dans $L^2(0,T,V)$ fort, dans $L^\infty(0,T,H)$ fort, dans $C(0,T,H)$ fort. L'application $u \to \frac{dy}{dt}(u)$ est continue de H fort dans $L^2(0,T,V')$ fort ainsi que $u \to \text{grad } p$

Démonstration : Nous utiliserons le lemme suivant, simple variante d'un lemme de LIONS [2].

Lemme

$\forall\, u,v,w \in V$

$$|b(u,v,w)| \leq C\|u\|^{1/2}\,\|w\|^{1/2}\,|u|^{1/2}\,|v|^{1/2}\,\|v\| \qquad (2.3)\ (**)$$

———— x ————

Soit alors u_n une suite convergente vers u dans H fort et $y_n = y(u_n)$ la solution associée. Posons $w_n = y_n - y$.

(**) On est dans la situation usuelle $V \subset H \equiv H' \subset V'$

(*) $C(0,T,H)$ ensemble des fonctions continues de $]0,T[$ dans H

(**) $\|\ \|$ est la norme dans V, $|\ |$ celle dans H.

On tire de (2.2)

$$(2.4) \qquad (w_n',z) + \nu a\,(w_n,z) + b\,(w_n,w_n,z) + b\,(w_n,y,z) + b\,(y,w_n,z) = 0 \quad \forall z \in V$$

Comme $w_n \in L^2(0,T,V)$ et $w_n' \in L^2(0,T,V')$, on obtient en intégrant (2.4) avec $z = w_n(t)$

$$|w_n(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|w_n(\sigma)\|^2 d\sigma = |w_n(0)|^2 - 2 \int_0^t b(w_n,y,w_n)\, d\sigma$$

D'après le lemme

$$\left|\int_0^t b(w_n,y,w_n)\, dt\right| \le C \int_0^t \|w_n(\sigma)\|\, |w_n(\sigma)|\, \|y(\sigma)\|\, d\sigma$$

Donc (2.5) implique $\forall \alpha > 0$:

$$(2.6) \qquad |w_n(t)|^2 + (2\nu - C\alpha) \int_0^t \|w_n(\sigma)\|^2 d\sigma$$

$$\le |w_n(0)|^2 + \frac{C}{\alpha} \int_0^t |w_n(\sigma)|^2\, \|y(\sigma)\|^2 d\sigma$$

Faisant $\alpha = \frac{2}{C}$ le lemme de Gronwall donne

$$(2.7) \qquad |w_n(t)|^2 \le C_1\, |w_n(0)|^2$$

Donc $w_n \to 0$ dans $L^\infty(0,T,H)$ fort

Faisant $0 < \alpha < \frac{2\nu}{C}$ dans (2.6) et utilisant (2.7), on a

$$\int_0^t \|w_n(\sigma)\|^2 d\sigma \le C_2\, |w_n(0)|^2$$

Donc $w_n \to 0$ dans $L^2(0,T,V)$ fort.

On sait, d'autre part, que $\sum_i y_i\, D_i\, y$ et $\sum_i y_{n,i}\, D_i\, y_n$ appartiennent à $L^2(0,T,V')$. Montrons qu'en fait $\sum_i y_{n,i}\, D_i\, y_n$ converge vers $\sum_i y_i\, D_i\, y$ dans $L^2(0,T,V')$ fort.

$$\sum_i y_{n,i}\, D_i\, y_n - \sum_i y_i\, D_i\, y = \sum_i y_{in}\, D_i\, w_n + \sum_i w_{in}\, D_i\, y.$$

Or, il résulte du lemme que si on pose

$$g(u,w)v = b(u,v,w) = -b(u,w,v)$$

on a

$$|g(u,w)|_{V'} \leq C \, \|u\|^{1/2} \, \|w\|^{1/2} \, |u|^{1/2} \, |v|^{1/2}$$

En particulier

$$\int_0^t \Big|\sum_i y_{n,i}(\sigma) \, D_i \, w_n(\sigma)\Big|_{V'}^2 \, d\sigma \leq C \int_0^t \|y_{ni}(\sigma)\| \, \|w_n(\sigma)\| \, |y_{ni}(\sigma)| \, |w_n(\sigma)| \, d\sigma$$

$$\leq C \, |y_n|_{L^\infty(0,T,H)} \, \|y_n\|_{L^2(0,T,V)} \, \|w_n\|_{L^2(0,T,V)} \, |w_n|_{L^\infty(0,T,H)}$$

Même démonstration pour $\sum_i w_{in} \, D_i \, y \to 0$ $\quad L^2(0,T,V')$ fort.

De plus, en écrivant

$$\|w_n'(t)\|_{V'} = \sup_z \frac{|(w_n'(t),z)|}{\|z\|}$$

et en utilisant (2.4) et le lemme, on obtient

$$\|w_n'(t)\|_{V'} \leq C_3 \, \|w_n(t)\|_V$$

Donc $w_n' \to 0$ dans $L^2(0,T,V')$ fort

L'injection de $W(0,T) = \{v \in L^2(0,T,V),\ v' \in L^2(0,T,V')\}$ dans $C(0,T,H)$ étant continue (LIONS & MAGENES [1]) $w_n \to 0$ dans $C(0,T,H)$ fort.

Enfin d'après (1) $y_n' + \text{grad } p_n \to y' + \text{grad } p$ dans $L^2(0,T,V')$ fort et donc grad $p_n \to$ grad p $L^2(0,T,V')$ fort.

———————X———————

La proposition 1 permet d'énoncer des résultats d'existence variés. En voici deux.

Proposition 3

$\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des $w \in H$ tels qu'il existe un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant le minimum de $J_\varepsilon(u)$ est dense dans H. Où

Premier cas

$$J_\varepsilon(u) = \|y(u)-z_d\|_{L^2(0,T,V)} + \varepsilon \|u-w\|_H$$

Deuxième cas

$$J_\varepsilon(u) = \|y(u,T) - z_d\|_H + \varepsilon \|u-w\|_H$$

(y(u) est la solution du problème (1) et z_d est donné dans l'espace adéquat).

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 et du théorème 1 Chapitre 2 ; l'application $u \to y(u)$ est en effet continue de H dans $L^2(0,T,V)$, et l'application $u \to y(u,T)$ est continue de H dans H comme composée de $u \to y(u)$ de H dans C(0,T,H) et de $y \to y(T)$ de C(0,T,H) dans H.

———X———

3. UN EXEMPLE DE CONTROLE NON LINEAIRE POUR UNE EQUATION HYPERBOLIQUE

Nous modifions un exemple de LIONS [1] p. 367.

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un fermé de $L^\sigma(\Omega)$ $\quad 1 < \sigma < \infty$ et contenu dans
$\mathcal{U} = \{v \ ; \ 0 \leq v < \beta \quad \text{p.p dans } Q\}$

On considère le problème

$$(3.1) \qquad \begin{cases} y'' - \Delta y + vy'' = f \in L^2(0,T,L^2(\Omega)) \\ y(t) \in H_0^1(\Omega) \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_o \in H_0^1(\Omega) \\ y'(0) = y_1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

On sait que ce problème admet une solution unique $y(v) \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ et telle que $y'(v) \in L^2(Q)$.

Si on note $|\ |$ la norme dans $L^2(\Omega)$ et $\|\ \|$ la norme dans $H_0^1(\Omega)$, on sait aussi que y vérifie l'inégalité de l'énergie.

$$(3.2) \qquad |y'(t)|^2 + \|y(t)\|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega v\, y'^2 \, dx\, dt \leq \alpha \|f\|^2_{L^2(Q)}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_0^t |y'(\sigma)|^2 \, d\sigma + \|y_o\|^2 + |y_1|^2$$

Nous allons donner un résultat simple de continuité de l'application $v \to y(v)$. Soit une suite v_n d'éléments de $\mathcal{U}_{ad}$ convergente vers u dans $L^\sigma(Q)$ fort. Posons $y_n = y(v_n)$.

Comme $v_n \geq 0 \ \ \forall n$, on déduit de (3.2) à l'aide du lemme de Gronwall que y_n appartient à un borné de $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$.

y_n' appartient à un borné de $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

On peut donc extraire une sous suite, notée encore y_n, telle que y_n converge vers y $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ faible étoile et y_n' converge vers $y'L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ faible étoile.

Considérons alors la formulation variationnelle de (3.1)

$$(3.3)\qquad \begin{cases} z \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \qquad z' \in L^2(Q) \qquad z(T) = 0 \\ -\int_0^t (y_n',z')\,dt - (y_n'(0),z(0)) + ((y_n,z))_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \\ \qquad + \int_0^t (v_n\, y_n',z)\,dt = \int_0^t f(t)\, z(t)\,dt \end{cases}$$

Le seul problème pour le passage à la limite dans (3.3) est le terme $\int_0^t (v_n\, y_n',z)\,dt = \int_0^t \int_\Omega v_n\, y_n'\, z\,dx\,dt$.

Comme $y_n' \to y'$ $L^2(Q)$ faible en particulier, il suffit de montrer que $v_n z \to vz$ $L^2(Q)$ fort. Ceci découle de la majoration $v_n < \beta$ et du théorème de Lebesgue (au moins pour une sous suite extraite).

(3.3) étant équivalent à (3.1), on en déduit que $y = y(v)$ et on conclut comme d'habitude que c'est la suite y_n toute entière qui converge vers y. Donc

Proposition 4

L'application $v \to y(v)$ est continue de $L^\sigma(Q)$ fort dans $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ faible.

On déduit par application du théorème 1 Chapitre 2 et de la proposition 1 un résultat d'existence "en densité" :

Proposition 5

$\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des $w \in L^\sigma(Q)$ tels que le minimum soit atteint dans

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \left(\| y(v) - z_d \|_{L^2(Q)} + \varepsilon \| v - w \|_{L^\sigma(Q)} \right)$$

est dense dans $L^\sigma(Q)$.

Où $y(v)$ est la solution de (3.1) et

$\mathcal{U}_{ad}$ est un fermé non nécessairement convexe contenu dans

$\{v,\ 0 \leq v < \beta$ p.p dans $Q\}$.

———— X ————

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE

ARIS H. [1]

"Condition suffisante de dérivabilité de l'application prox."

Séminaire d'Analyse Unilatérale Vol. 2 (1969) exposé n° 4
Faculté des Sciences de Montpellier.

ASPLUND E. [1]

"Topics in the theory of convex functions"

Proceeding of NATO Venice June 1968
Aloio GHIZZETTI editor - Edizioni "Oderisi".

ASPLUND E. [2]

"Fréchet differentiability of convex functions"

Acta Math 121 (1968) p. 31-47.

ASPLUND E. [3]

"The potential of projections in Hilbert space"

(Cité par EDELSTEIN M. dans Farthest points of sets in (UC) Banach spaces).

ASPLUND E. [4]

"Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces"

Israel J. of Maths 4 (1966) P. 213-216.

BARANGER J. [1]

"Existence de solutions pour des problèmes d'optimisation non convexe"

CRAS t. 274 p. 307.

BARANGER J. [2]

"Existence de solution pour des problèmes d'optimisation non convexe"

A paraître au Journal de Math. Pures et Appliquées.

BARANGER J. & TEMAM R. [1]

A paraître.

BOURBAKI N. [1]

"Topologie générale"

Livre III Chap. 9 Hermann.

BREZIS H. [1]

"Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectorie en dualité"

Ann. de l'Institut Fourier t 18 (1968) p. 115-175.

BREZIS H. [2]

"Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution"

Proceeding of NATO Venice June 1968
Aldo Ghizetti editor - Edizioni "Oderisi".

CHOQUET G. [1]

"Lectures on Analysis Vol. 1 Integration and topological vector spaces"

Benjamin New York Amsterdam 1969.

CLARKSON J.S. [1]

"Uniformly convex spaces"

Trans Am Math 40 p. 396-416 (1936).

CUDIA D.F. [1]

"Convexity"

Proceeding of symposia in pure math Vol. VII AMS 1963 p. 73 à 9

DEUTSCH,POLLUL W. & SINGER I. [1]

"On set valued metric projections, Hahn Banach extension maps, and spherical image map".

EDELSTEIN M. [1]
"Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces"
Israel J. of Math Vol. 4 n° 3 1966 p. 171-176.

EDELSTEIN M. [2]
"On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces"
Journal of the London Mathematical society Vol. 43 part 3 (19(

EDELSTEIN M. [3]
"A note on nearest points"
The Quaterly J of Math 21-84 (1970) p. 403-405.

HOLMES R.B. [1]
"A course on optimisation and best approximation"
Springer-Verlag (lectures notes in Math) 1972.

KLEE V. [1]
"Convexity of Chebyshev Sets"
Math Annalen 142 (1961) p. 292-304.

LAURENT P.J. [1]
"Approximation et optimisation"
Hermann Paris 1972.

LESCARRET C. [1]
"Semi continuité supérieure de la multi application 'prox'"
Séminaire d'Analyse Unilatérale (1969) exposé n° 5
Faculté des Sciences de Montpellier.

LIONS J.L. [1]
"Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles"
Paris DUNOD GAUTHIER-VILLARD 1968.

LIONS J.L. [2]
"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires"
Paris DUNOD 1969.

LIONS J.L. & MAGENES E.

"Problèmes aux limites non homogènes et applications"

Paris DUNOD 1968.

LOVAGLIA A.R. [1]

"Locally uniformly convex Banach spaces"

Trans. Amer Math Soc. 78 p. 225-238 (1955).

MOREAU J.J. [1]

"Proximité et dualité dans un espace hilbertien"

Bull. Soc. Math. France 93 (1965) p. 273-299.

MOREAU J.J. [2]

"Fonctionnelles convexes"

Séminaire sur les équations aux dérivées partielles.
Collège de France, Paris.

MURAT F. [1]

"Un autre exemple pour le problème du contrôle dans les coefficients"

CRAS (1970).

SINGER I. [1]

"Best approximation in normed linear spaces"

Springer-Verlag 1970.

SMULIAN V.L. [1]

"Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach"

Dokl Akad Nank SSSR (N.S) 27 (1940) p. 643-648.

STETCHKINE S.B. [1]

"Caractérisation de l'approximation par des sous-ensembles d'espaces vectoriels normés (en russe)"

Rev. Math. pures et appliquées 8 (1963) p. 5-18.

TEMAM R.

"Analyse Numérique"

PUF 1970.

VAINBERG. M.M. [1]

"Le problème de la minimisation des fonctionnelles non linéaire

CIME IVCICLO Varenna 1970 - Edition CREMONESE Rome 1971.

ZIZLER V. [1]

"On some extremal problems in Banach Spaces".